理論物理学での波の関数１

――正円で説明する正弦波――

A LIFE COM. バイオ研究室

富岡和人

１　まえがき

「理論物理学での波の関数」では，波の基礎について理論物理学で説明することを試みる．本書の基礎では，フーリエ級数理論の応用で波を記述することを考えている．著者が学生のころから触れてきた基礎物理学の波の理論では，本書で著者が独自に与えたように波の速さ，波長および振動数などを客観的には定義していない．このことは，理論物理学として波を論じ計算する際に計算を困難にする要因であるものと著者は感じていた．「理論物理学での波の関数」では，著者の研究活動で使用できる程度の客観性の有る定義を与えた波の理論を構築することを試みている．波の基礎理論は，日本の大学での工学科で１年生の基礎物理学に相当する科目に設けられている．物質を説明する際にも２０１１年現在では粒子および波の両方の性質を考慮に入れて研究することは普通になってきていると言える．そのような環境で，波の速さ，波長および振動数の定義が不明であることは多くの計算に問題を生じるものと著者は考える．本書は，ひとつのファイルですべてを説明するものではない．２０１１年８月現在，いくつかのファイルに分割をして著者の基礎物理学での波の理論を説明していく予定である．それらのファイルの中で，波のひとつの原理的な考え方から多くの波の特性について説明していくように試みる．ドップラー効果についても，そのような考え方で著者が学生のころに触れた考え方とは別に導出してみせるつもりである．それぞれのファイルでは，基礎物理学，数学および工学での各分野の性質を強く出していくことになるものと考えている．第１回である「理論物理学での波の関数１」では基礎物理学の性質を強く出している．

著者は基礎物理学の理論では，電磁気学での電位並びに特殊相対性理論での速度，エネルギーおよび質量についてのファイルを発表している．文献１～文献６は電位の定義の説明をしたファイルである．文献７および文献８は特殊相対性理論での説明である．文献７では質点の速度ベクトルを定義している．質点の速度ベクトルの説明では物理学理論および数学理論で異なるものが多く有ることを著者は経験している．文献７では，著者の定義した速度ベクトルを説明している．文献８では静止質量を説明する際に生じる分母が零になる問題について関連の有るファイルである．著者が独自に構築した理論では分母が零になる計算をしないで真空中の光の速さで移動する質点の静止質量を計算できることを説明している．著者が独自に構築している波の理論は，それらの理論と共に著者の基礎物理学の理論に含まれるものである．

２章では本書の導入部として波の説明をした．２章１節で波の速さの定義をした．波の速さの説明では微分を使用している．著者の経験では，日本の大学の指導で微分には十分な説明を得なかった．そして，微分には微小量としての説明をしていた．２章１節で著者が採用した微分法論では微分を微小量で定義していない．このことは，理論としても実用としても重要であるものと著者は考えている．そのような微分法論を著者が学んだ本は文献９である．２章２節では，定義した波の速さを使用して波長の定義について説明をした．２章３節では，波の速さおよび波長の定義を考慮に入れた振動数の定義について説明をした．振動数の単位については文献１０を参考にした．

著者は，心臓血管系の回路モデルを専攻とする工学研究を学生のころから行っている．このような専攻からでは，工学理論を構築することが専門的な能力となる．本書のように基礎物理学の理論は，そのような工学研究で使用するので著者が独自に構築する場合が生じる次第である．心臓血管系を考慮する際にコンプライアンスおよび血流量について著者の工学研究でも計算することがある．著者が構築した心臓血管系の回路モデル理論でコンプライアンス――文献１１に掲載している．――を定義するのに内圧および血液量を使用する．心臓および血管内の内圧および血液量を周期関数として記述する際にも波の理論を使用することは著者が２０１１年現在まで採用する方法のひとつである．著者が心臓血管系の回路

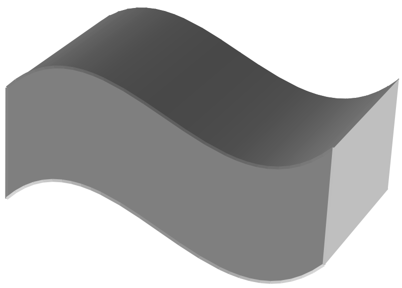
モデル理論で定義した血流量の定義――文献１２で発表している．――でも波の理論を使用する計算ができる．このようなことからも著者が波について計算する機会が生じる．著者が定義した血流量は，著者が学生のころ読んだ生理学書の血流量の説明とは異なり一般の血流のすべてについて計算できるものである．著者が知る既出の生理学書の血流量は特定の場合にしか使用でいないことは明らかなものであった．このことで，著者が扱う工学の計算にも耐えることができない未熟な計算であった．このようなことで，一般の血流量を説明できる熟達した計算技術を学術理論に導入することは工学のみならず他の分野でも重要なことであるものと著者は考える．血流が生体の営みを維持するうえでいろいろと重要な関与を持っていることは直感的にも明らかであり，自然科学的な解明を待つこともなく受け入られているものと著者は想像をする．そのような血流を血流量として観測して，各生体の活動を説明することは生体の理解のためにも人類が望むところではないかと２０１１年現在の著者は考えている．波として描くことができる血流量の理解を助けるものと２０１１年現在の著者は考え，本書の波の理論を使用している．文献１３～文献１５は著者が初心者向けに作成した心臓血管系の回路モデルのファイルである．

本書では‘誤り’がないことを保証はしない．本書の校正の作業は今後も行う予定である．本書の‘誤り’が見つかった際には不定期に改訂を行い発行する予定である．

目次

２　正円で説明する波（wave）の速さ，振動数および波長

波を意味する現象は面が空間の上下に繰り返し移動する現象に見ることができる．そのような上下に移動する垂直方向に軸を仮定した直交座標系の面上に座標の点を考えることができる．その点を繋げることで面上に曲線を仮定できる．空間の上下方向を垂直方向の軸にし，その上下方向に対して直角になる水平方向の各位置を水平方向の座標軸にした２次元の直交座標系を考える．そのような２次元の直交座標系で曲線を描くものとする．その曲線は，連続的に上下に値が変化する曲線であるものと仮定できる．そのような曲線は波を表す曲線であるものと我々は一般に認識できる．



波を表す曲線を記号で記述する方法に正円を使うものがある．ここで使用する正円は，中心Ｏから等しい距離に在る点の２次元座標系上の線で描く円である．正円を描く線上の任意の位置に，ひとつの点を仮定する．その点が正円の円周上を逆時計回り（counter-clockwise rotation）あるいは時計回り（clockwise rotation）のどちらか一方に向かって移動し続けることを仮定する．その仮定した，ひとつの点で記述する座標のｙ軸上の点がある．そのｙ軸上のひとつの点が，ｙ軸上の正円の直径に相当する長さの区間内で，上下に移動することを考える．そのように上下に移動する，ｙ軸上のひとつの点は上述で説明した面の上下の移動として扱うことができる．正円上の点の座標はｘ軸成分およびｙ軸成分をもつ．そのような点のｙ軸成分の値が変わる場合にはｘ軸成分の値も変わる．各成分が変化する際には正円上の点の移動距離が変化する．正円の半径は定数であるので，その円周上を１周した点の移動距離が定数になることは明らかである．正円上のひとつの点が正円を２周すると正円の１周分の移動距離の２倍である．そのような移動距離に対応したｘ軸およびｙ軸の成分の関数を考えることができる．ｘ軸およびｙ軸上で，その点が正円の直径の長さの区間内を行ったり来たりすることは明らかである．そのような軸上の点を示す関数の独立変数（argument あるいは independent variable）となる「点の移動した距離」で正円上の点の位置を知るのは，直感的に分り難いものと考えることができる．正円上の位置を直感的に知ることができる数量として角度（angle）を使用できる．角度で使用する単位に弧度（radian）と呼ばれるものがある．弧度はラジアンとも呼び，記号で rad と記述する．弧度は（2.1）で定義することができる．弧度の定義（2.1）の右辺には正円の半径（2.2）および正円上の弧の長さ（2.3）を記述している．

$$\theta \equiv \frac{l}{r}\,\mathrm{rad}, (r \neq 0) \cdots (2.1)$$

$$r > 0 \cdots (2.2)$$

$$l \geq 0 \cdots (2.3)$$

正円を定義するのに正の値の半径（2.2）が必要である．正円上には弧の長さを図 2.1 のように考えることができ，弧（2.3）は距離として扱うことができる．弧度の定義（2.1）では，弧度は（2.4）のように０以上の実数になる．

$$\theta \geq 0 \cdots (2.4)$$

このような弧度（2.4）を独立変数とする関数で，図 2.1 の円周上に仮定する点の位置を示す座標の成分を記述することができる．そのようなｘ軸およびｙ軸成分の値は，それぞれｘ軸およびｙ軸上の区間（2.5）の間を行ったり来たりすることができる．

$$[-r, +r] \cdots (2.5)$$

弧度では $0°$ に対応する正円上の位置では（2.6）として記述できる．このことは，正円の円周（circumference）の定義に関係して決定する．正円の円周の長さを（2.7）にして定義した場合には，弧度の定義（2.1）を使用すると，正円上の点が円周を１周する位置の弧度は（2.8）にできる．

$\theta = 2\cdot\pi\cdot(n-1)\,\mathrm{rad}, (n = 1,2,\cdots)\cdots(2.6)$

$2\cdot\pi\cdot r\cdots(2.7)$

$\theta = 2\cdot\pi\,\mathrm{rad}\cdots(2.8)$

90°に対応する位置では（2.9）として記述できる．他の正円上の点の位置についても同様に弧度を与えることができる．このような記述では正円上の点の位置を弧度で直感的に知ることができる．

$\theta = \frac{\pi}{2}\cdot(4n-3)\,\mathrm{rad}, (n = 1,2,\cdots)\cdots(2.9)$

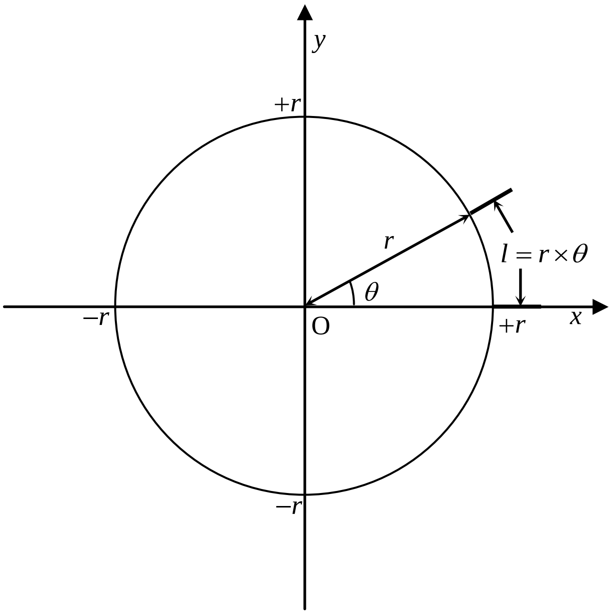


図 2.1　正円，半径，弧，弧度および座標系との関係

弧度の定義（2.1）で仮定した弧（2.3）を積分論で計算することは多くの計算をすることになるので，（2.1）を書き換えて（2.10）として弧（2.3）を計算する方が一般的である．

$l = r\times\theta \geq 0\cdots(2.10)$

上述のように，図 2.1 の弧の長さ（2.10）は正円上の点の移動距離として扱うので０以上の値である．弧度に負の値を考えることは，点の移動距離（2.10）からでは困難である．正円上の点の座標（2.11）の成分 x および y で各軸上の点（2.12）および点（2.13）を記述できる．弧度を独立変数とする（2.12）や（2.13）の関数に使用する弧度の負の値は「理論物理学での波の関数２」で考える．

$(x, y)\cdots(2.11)$

$(0, y(\theta))\cdots(2.12)$

$(x(\theta), 0)\cdots(2.13)$

一般に，正円上の点が逆時計回り――左回りのこと．――に回転するものと考えて弧度の正の値を仮定する．

正円上の点を使用してｘ軸およびｙ軸上に波の関数を仮定した．その波の関数は弧度を独立変数とするものと仮定して定義できた．そのような波の関数には正円上の点の移動でｘ軸およびｙ軸上の値が変化することから，波の関数の値が変化するものと考えることができる．そのような点の移動に速さを考えることができる．２章１節では，正円を使用して波の速さについて説明する．等速で回転する点の座標を与えるｘ軸およびｙ軸上の点は，区間（2.5）内で行ったり来たりする．このことで，波の関数の値は各軸上の値を繰り返し示すことになる．このように波の関数の値は，ひとつの型を繰り返すものと考えることがある．その波の型に波の長さを考えることができる．その波の長さは，正円上の点の移動距離で考えられることを２章２節で説明する．波の関数に波の速さおよび波の長さを考えることで，正円上の点が波の長さに対して単位時間にどの程度の移動距離を示すことができるかを考えられる量を仮定できる．この量を使用すると，波の長さを基準にして正円上の点が単位時間に移動できる距離を扱うことができる．そのような量を２章３節で説明する．

2.1　正円上の点の速さ（speed）

２章で波の関数を考える際に，正円上に任意のひとつの点を仮定した．質点の物理学では，「質点」を仮定して速度ベクトルを定義した．質点の体積は計算できない．２章１節では，質点を使わないで，波の速さを定義する．本書の「波の速さ」は，正円上に仮定した円周上での「点」の移動距離を使用して定義する．質点の速さは，質点の速度ベクトルの大きさとして，質点の力学では，定義した．「質点の速さ」が「波の速さ」と異なることは，質点を使用しないで定義することからも明らかである．

図 2.1 の正円上に仮定したひとつの点が移動することでは，それぞれの時点（2.1.1）のときに円周上に在るひとつの点が移動するものと考えることができる．正円上の弧の長さ（2.10）を使用して，正円上の点の移動距離の関数（2.1.2）を仮定する．（2.1.2）の右辺に記述した正円の半径（2.1.3）は，定数であるものと仮定する．点の移動距離（2.1.2）の右辺には，時点（2.1.1）を独立変数とする弧度の関数（2.1.4）を仮定している．（2.1.2）は弧の長さであり，点の移動距離でもあるので弧度（2.1.4）は０以上の実数であるものと定まる．

$t \cdots (2.1.1)$

$l(t) = r \cdot \theta(t) \geq 0 \cdots (2.1.2)$

$r = \mathrm{const.} > 0 \cdots (2.1.3)$

$\theta(t) \geq 0 \cdots (2.1.4)$

弧度（2.1.4）の微分係数を（2.1.5）のように定義する．（2.1.5）は角周波数（angular frequency）と呼ぶものである．角周波数は角振動数（angular frequency）とも呼ばれる．本書の基礎物理学での波の理論で波を記述する際には，図 2.1 のような正円を使用することになる．図 2.1 のような正円上に仮定した点が逆時計回りあるいは時計回りに周り続ける際には，x 軸および y 軸上の点は図 2.1 の中心――直交座標系の原点 O でもある．――から x 軸では左右に動き，y 軸では上下に動くことになる．このような各軸上の点の動きでは，各軸上の点が振動しているものと扱うことができる．この意味では，（2.1.5）は角振動数と呼ぶことができる．正円上の点では，そのような動きで正円上を回転している．そのような回転で生じる各軸上の点の動きで記述する波には，正弦関数のように繰り返しながら生じるものがある．そのような波の繰り返しにはひとつの波となる型を考えて，その型の波が循環するものと扱うことがある．このことでは，波が繰り返し循環するものと考えることができる．このような波の循環では，角周波数――巡ることを意味する「周」を採用しているものと著者は考える．――と呼ぶことには，直感的に著者は同意するものである．角振動数および角周波数で「角」と示すことは，（2.1.5）では，弧度を意味するものと著者は考える．このように弧度を「角」と呼ぶことで（2.1.5）の右辺の定義を考えるならば角の速さを記述しているものと考えることもできる．（2.1.5）はベクトルではないので「速度」と記述して「速さ」と意味することは，物理学での質点の速度ベクトルとの区別が紛らわしいものとなる．このような意味では，本書の理論で，（2.1.5）を角速度と呼ぶことはしない．力学の剛体の回転運動（rotational motion）では角速度（angular velocity）ベクトルが定義される．そのような角速度ベクトルの大きさを意味する角速度の速さに（2.1.5）の値が等しいものと扱える場合はある．ただし，剛体（rigid body）の力学では質点系の力学を応用する．このことで，剛体の並進運動（translational motion）および回転運動を記述する際に慣性座標系内の剛体を仮定して考えることは一般的である．この意味で，剛体の部位に点を仮定して角速度ベクトルを定義するならば角速度ベクトルの速さは角振動数（2.1.5）とは異なる解釈であることは明らかである．上述のように本書の角振動数の定義では，正円上の点を仮定しても慣性座標系内での剛体および質点を仮定してはいない．

$\omega(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdots (2.1.5)$

図 2.1 での正円上の弧の長さで計算した点の移動距離（2.1.2）が微分可能な関数であることを仮定すると（2.1.6）を記述できる．（2.1.6）のここでの説明の時点（2.1.1）は，定数であるものと扱う．（2.1.6）に記述している（2.1.7）は，時間――時の長さを意味する．――を意味する．（2.1.6）では，時間（2.1.7）が唯一の変数である．（2.1.6）に記述してある（2.1.8）は，図 2.1 の正円上に仮定した点が円周上を移動する速さである．そのような点の速さを，本書の理論では，波の速さであるものと扱うことになる．波の速さ（2.1.8）は（2.1.6）の時間（2.1.7）の定数として扱う係数である．（2.1.6）の右辺の第１項は，点の移動距離（2.1.2）の微分と呼ばれるものである．（2.1.6）の微分

の波の速さ（2.1.8）は，独立変数として扱う時間（2.1.7）の１乗に掛ける係数である．この意味では，(2.1.6) の右辺の第１項の微分は線形性を示していることは明らかである．

$l(t+h_t)-l(t)=v_{\mathrm{wave}}(t)\cdot h_t+\alpha_l(t;h_t)\cdots(2.1.6)$

$h_t\cdots(2.1.7)$

$v_{\mathrm{wave}}(t)\cdots(2.1.8)$波の速さ

本書の理論の「波の速さ」は，著者が独自に（2.1.9）で定義している．波の速さ（2.1.9）は，図 2.1 の正円上に仮定した点の速さである．そのような波の速さ（2.1.9）は，図 2.1 のような座標軸上の点の振動で定義されていない．波の速さ（2.1.9）は，図 2.1 の円周上に仮定した点の微分可能な移動距離（2.1.2）で，(2.1.6) の右辺の微分に記述している微分係数として定義されている．

$v_{\mathrm{wave}}(t)\equiv\lim_{h_t\to 0}\dfrac{l(t+h_t)-l(t)}{h_t}\cdots(2.1.9)$――正円上に仮定した点で定義する――波の速さの定義

著者の経験では，数学で質点の速さを定義しているものには覚えがない．数学では，微分係数の応用として点の速さを説明しているものがある．２０１１年現在までの著者が読んだ微分積分論の専門書で質点の速度を扱う部分では，ベクトルとして質点の速度を定義していない．そのような微分積分論の指導では，質点あるいは点の位置の座標を与えて，その座標の各成分の微分係数を計算することで質点あるいは点の速度と呼んでいる．文献７で，著者が特殊相対性理論の速度の説明で定義した質点の速度ベクトルでは質点およびベクトルを仮定した．このように異なる速度の定義については，物理学の専門書にも見ることができる．一部の物理学の専門書では速度ベクトルを点で説明しているものがあり，質点を仮定することなく扱っていた．質点には質量を仮定していることが，数学の点とは異なる個所である．このような質量の仮定は物理学での計算で強力な影響力を与えるものであり無視できないもの，と著者は考える．質点の速さおよび波の速さは，物理学の量子論では，異なる計算結果を与える個所でもある．そのような２０１１年現在での理論物理学の解釈で異なる個所を明確にするうえでも，著者は「質点」を仮定する場合と「点」を仮定する場合での定義の与え方が異なることの重要性を考える．

正円上に仮定した点の移動距離（2.1.2）の右辺を波の速さの定義（2.1.9）の右辺に代入すると（2.1.10）になる．(2.1.10) の右辺には正円の半径 (2.1.3) は定数であるので，(2.1.10) は (2.1.11) に書き換えることができる．(2.1.11) の右辺には (2.1.12) を記述している．(2.1.12) の左辺を (2.1.11) の右辺に代入すると (2.1.13) を記述できる．(2.1.12) の左辺は角振動数（2.1.5）であるので，波の速さ（2.1.13）は角振動数（2.1.5）を使用して（2.1.14）に書き換えることができる．波の速さ（2.1.14）の右辺では，正円の半径（2.1.3）と角振動数（2.1.5）の掛け算で波の速さ（2.1.9）を記述している．

$$v_{\mathrm{wave}}(t)=\lim_{h_t\to 0}\frac{r\cdot\theta(t+h_t)-r\cdot\theta(t)}{h_t}\cdots(2.1.10)$$

$$v_{\mathrm{wave}}(t)=r\cdot\left(\lim_{h_t\to 0}\frac{\theta(t+h_t)-\theta(t)}{h_t}\right)\cdots(2.1.11)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}=\lim_{h_t\to 0}\frac{\theta(t+h_t)-\theta(t)}{h_t}\cdots(2.1.12)$$

$$v_{\mathrm{wave}}(t)=r\cdot\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(2.1.13)$$

$$v_{\mathrm{wave}}(t)=r\cdot\omega(t)\cdots(2.1.14)$$

次に，正円上に仮定した点の移動距離の微分の記述について考える．(2.1.6) の右辺の第１項に点の移動距離の微

分を記述したことはすでに説明をした．（2.1.6）の右辺の第１項を使用して微分係数である波の速さ（2.1.9）を記述する際に，時点（2.1.1）の微分を使用する．時点（2.1.1）の微分を導出するために関数（2.1.15）を仮定する．ここの議論では（2.1.15）は実数全体を仮定する．時点であるので０以上の実数のみを考える場合もあるが，そのことをここでは論点としない．そのような時点の区間を使用する際には (2.1.15) の定義区間を変更すればよいものとする．

$f(t)=t\cdots(2.1.15)$

関数（2.1.15）が微分可能な関数であるものと仮定すると（2.1.16）を記述できる．（2.1.16）の右辺の第１項を時点（2.1.15）の微分であるものとして（2.1.17）を記述できる．（2.1.16）では（2.1.1）は定数であるものと仮定する．時間（2.1.7）を独立変数として（2.1.16）で扱うことになる．時点（2.1.15）の微分（2.1.17）は，時間（2.1.7）を独立変数とする，線形性を示す関数である．そのように線形性を示す関数（2.1.17）では傾きは１である．

$(t+h_t)-(t)=1\cdot h_t+\alpha_t(t;h_t),(\alpha_t(t;h_t)=0)\cdots(2.1.16)$

$\mathrm{d}t(h_t)=1\cdot h_t\cdots(2.1.17)$

（2.1.6）の右辺の第１項に（2.1.17）の左辺を代入することで，図 2.1 の正円上に仮定した点の移動距離の微分は（2.1.18）で記述できる．（2.1.18）は接線の方程式を記述しているものとも解釈できる．波の速さは，定数である時点（2.1.1）での定数であり接線の方程式になる直線の方程式の傾きである．その直線の方程式を定義する独立変数は（2.1.19）の右辺の第１項である．時間（2.1.7）を計算する際に使用する始点となる時点（2.1.1）から時間（2.1.19）だけ経過した個所の時点の軸上の値を示す時点（2.1.20）が，接線の方程式（2.1.18）の独立変数である．本書で採用している（2.1.18）のような微分の記述方法は，著者が文献９で学んだものである．本書でそのような記述方法を使用した個所には*を示しておく．

$\mathrm{d}l(t)(h_t)=v_{\mathrm{wave}}(t)\cdot\mathrm{d}t(h_t)\cdots(2.1.18)$ 接線の方程式*

$h_t=t_{\mathrm{tangent}}-t,(t=\mathrm{const.})\cdots(2.1.19)$

$t_{\mathrm{tangent}}=t+h_t\cdots(2.1.20)$

（2.1.6）の右辺の第１項に点の移動距離の微分（2.1.18）を代入すると（2.1.21）を記述できる．（2.1.21）の右辺の第１項を（2.1.21）の左辺に移項すると（2.1.22）になる．点の移動距離（2.1.2）の差を（2.1.23）のように記述することで，（2.1.22）の左辺は（2.1.24）に記述できる．（2.1.24）の左辺の第１項および第２項が等しくない場合は（2.1.24）の右辺は零にはならない．（2.1.24）では，一般に，点の移動距離（2.1.2）の差は点の移動距離（2.1.2）の微分（2.1.18）には等しくないものと説明している．

$l(t+h_t)-l(t)=\mathrm{d}l(t)(h_t)+\alpha_l(t;h_t)\cdots(2.1.21)$*

$(l(t+h_t)-l(t))-\mathrm{d}l(t)(h_t)=\alpha_l(t;h_t)\cdots(2.1.22)$*

$\Delta l(t;h_t)=l(t+h_t)-l(t)\cdots(2.1.23)$

$\Delta l(t;h_t)-\mathrm{d}l(t)(h_t)=\alpha_l(t;h_t)\cdots(2.1.24)$*

関数の値が曲線を示す場合には，接線の傾きは接点ごとに異なることも有る．接線の傾きが異なることは，図 2.1 の正円上に仮定した点の速さが異なることを意味する．点の移動距離を与える関数（2.1.2）の接線の傾きの変化で，波の速さ（2.1.9）の変化を考えることができる．その点の速さは，（2.1.14）では角振動数（2.1.5）が変化することになる．微分係数（2.1.5）は弧度の関数（2.1.4）に線形結合を示す．微分係数の線形結合では微分係数の和（2.1.25）を保証する．微分係数の和（2.1.25）の右辺ではｎ個の弧度を仮定している．ｎ個の弧度を仮定することで，図 2.1 の同じ正円上にｎ個の点を仮定できる．微分係数の和（2.1.25）の左辺ではひとつの角振動数を仮定している．ひとつの角振動数にはひとつの点を図 2.1 の正円上に仮定できる．微分係数の和 (2.1.25) の左辺での点の個数は (2.1.25) の右辺での点の個数に一致しない．波の速さ（2.1.14）の右辺では，（2.1.25）の右辺に記述した各項の角振動数に対

して図 2.1 の正円上に仮定した各点の速さを計算できる．(2.1.25) の右辺の各角振動数で移動している各点の速さの総和は，(2.1.25) の左辺のひとつの点の速さに等しくなる．(2.1.25) の右辺に記述している各角振動数の値が確定している必要は一般にはなく，その総和が (2.1.25) の左辺に等しいことを説明している．そのような不確定な各角振動数で説明することで，一般には各角振動数で構成する無数の組み合わせを考えることができる．そのような無数の組み合わせを許す際に，角振動数である関数を数えきれないほど多く仮定できる必要がある．

$$\omega(t)=\omega_1(t)+\omega_2(t)+\omega_3(t)+\cdots+\omega_n(t)=\frac{\mathrm{d}\theta_1(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\theta_2(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\theta_3(t)}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\mathrm{d}\theta_n(t)}{\mathrm{d}t}\cdots(2.1.25)$$

図 2.1 の正円上に仮定した点の速さは，図 2.1 の正円の半径は (2.1.3) であるので (2.1.14) から (2.1.25) を保証して，(2.1.26) のように記述できる．(2.1.26) を (2.1.27) に書き換える．(2.1.27) の各項は図 2.1 の正円上に仮定した (2.1.25) の各点の速さである．

$$r\times\omega(t)=r\times\omega_1(t)+r\times\omega_2(t)+r\times\omega_3(t)+\cdots+r\times\omega_n(t)\cdots(2.1.26)$$

$$v(t)=v_1(t)+v_2(t)+v_3(t)+\cdots+v_n(t)\cdots(2.1.27)$$

(2.1.25) の左辺に仮定した図 2.1 の正円上での点が，その円周を１周する時間を (2.1.28) とする．(2.1.28) を周期と呼ぶことになる．(2.1.25) の右辺に仮定した各点の周期を (2.1.29) で記述する．２章２節以降でも波の周期については考える．２章３節で，正弦関数を使用した波の周期の定義について論じる．点の周期 (2.1.28) を使用すると等速での点の回転を仮定して，その点の移動距離 (2.1.30) を計算できる．同様に，周期 (2.1.29) を使用すると等速での各点の回転を仮定して，その点の移動距離 (2.1.31) を計算できる．

$T\cdots(2.1.28)$ (2.1.25) の左辺の点が正円の円周上を１周する時間

$T_n,(n=1,2,3,\cdots,n)\cdots(2.1.29)$ (2.1.25) の右辺の点が正円の円周上を１周する時間

$$2\cdot\pi\cdot r=v(t)\times T\cdots(2.1.30)$$

$$2\cdot\pi\cdot r=v_n(t)\times T_n,(n=1,2,3,\cdots,n)\cdots(2.1.31)$$

点の移動距離 (2.1.30) および点の移動距離 (2.1.31) を使用すると (2.1.27) は (2.1.32) に書き換えることができる．(2.1.32) を整理すると (2.1.33) を導出できる．(2.1.33) は (2.1.25) から導出したものである．(2.1.14) を (2.1.30) の右辺の速さに代入すると (2.1.34) になる．(2.1.25) の左辺の角振動数が (2.1.33) の左辺の周期に対応することは (2.1.35) を記述できることで明らかである．同様に，(2.1.14) を (2.1.31) の右辺の各点の速さに代入すると (2.1.36) になる．(2.1.25) の右辺の各角振動数が (2.1.33) の右辺の各周期に対応することは (2.1.37) で記述できる．

$$\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T_1}+\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T_2}+\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T_3}+\cdots+\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T_n}\cdots(2.1.32)$$

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+\cdots+\frac{1}{T_n}\cdots(2.1.33)$$

$$2\cdot\pi\cdot r=r\cdot\omega(t)\cdot T,(\omega(t)=\mathrm{const.})\cdots(2.1.34)$$

$$2\cdot\pi=\omega(t)\cdot T\cdots(2.1.35)$$

$$2\cdot\pi\cdot r=r\cdot\omega_n(t)\cdot T_n,(n=1,2,3,\cdots,n),(\omega_n(t)=\mathrm{const.})\cdots(2.1.36)$$

$$2\cdot\pi=\omega_n(t)\cdot T_n,(n=1,2,3,\cdots,n)\cdots(2.1.37)$$

正円上に仮定した点の移動では，点の移動している速さを仮定している．点の移動する速さは (2.1.14) で計算できるので，点の 0 より大きい角振動数を仮定する．この仮定で (2.1.35) から点の周期 (2.1.38) を計算できる．同様に (2.1.37) から点の周期 (2.1.39) を計算できる．周期 (2.1.38) および周期 (2.1.39) に (2.1.33) の関係を保証

される．正円上のひとつの点で，図 2.1 の各軸上の点の振動を計算することになる．各軸上の各点の振動が各波を表現していることは，すでに説明をした．周期（2.1.38）および周期（2.1.39）の計算は波にも使用できる．波を記述する角振動数が定数で使用でき，そのような角振動数で計算できる弧度を独立変数とする波の関数を定義できる．そのような波の関数で記述する級数で，一般の波を記述できる数学の理論が有る．そのような計算では，一般にフーリエ級数（Fourier Series）理論——付録 i .でフーリエ級数について簡単に説明をしている．——と呼ばれる数学理論を使用する．波の振動を図 2.1 の各軸上の値の振動として考える際には，図 2.1 のような正円を複数個仮定して各軸上の値の総和で波の関数の値を考えることができる．そのような各軸上の値の総和に無数の波の総和を考えることができ，ひとつの波を無数の波で記述できることをフーリエ級数理論では示す．角振動数が等しい場合では，正円の半径が異なることで正円上に仮定した点の速さは異なる．正円の半径が異なることでは，各正円を描いている直交座標系の軸上での点の振動する幅が異なることを説明できる．そのように振動の幅や点の速さが異なることで異なる波を描くことになる．(2.1.25）では，ひとつの角振動数を仮定することで複数の角振動数を仮定することができる．この場合では，一般に正円上に仮定する点の個数は一意に定めることはできない．(2.1.25）のように弧度の微分係数に線形結合を計算できることで，複数個の正円を仮定して，各正円で各弧度を計算することもできる．複数個の正円で複数個の波を描くことができる．それらの複数個の波は，数学および物理学理論で関係を与えられている保証はない．フーリエ級数理論では，そのように仮定できる複数の波に関係を与えることはできる．

$$T=\frac{2\cdot\pi}{\omega(t)},(\omega(t)\neq 0)\cdots(2.1.38)$$

$$T_n=\frac{2\cdot\pi}{\omega_n(t)},(\omega_n(t)\neq 0,n=1,2,3,\cdots,n)\cdots(2.1.39)$$

一般には，フーリエ級数およびフーリエ変換（Fourier Transform）を使用して振動する点で波が記述できる．フーリエ級数の技術を使用することで，直交系と呼ばれる系が三角関数（trigonometric function）の正弦（sine），余弦（cosine）および定数で記述できる．その三角関数の直交系を使用して，一般的な波を記述する．このことでは，図 2.1 の正円を使用して正弦波（sine wave あるいは sinusoidal wave）——一般に正弦あるいは余弦の三角関数で描く波のこと．——を与えて，フーリエ級数を応用して波を記述することを考える．三角関数の直交系を記述するには角振動数（2.1.5）にあたる値は定数で使用できる．図 2.1 の正円上に仮定した点の角振動数で，時点ごとに変化する——フーリエ級数で記述できる——波を表現できる．

角振動数（2.1.5）が定数であるならば，図 2.1 の正円上に仮定した点が等速で回転することは，波の速さ（2.1.14）の右辺から，明らかである．図 2.1 の正円上に仮定した点が等速で回転することで，点の移動距離（2.1.2）は直線になるグラフを描く．このことは，点の移動距離の関数（2.1.2）の接線の方程式は点の移動距離の関数（2.1.2）に等しいものと扱うことになる．このことを次に計算で示す．点の移動距離（2.1.2）の微分（2.1.18）で接線の方程式を示している．点の移動距離の微分（2.1.18）の右辺に時間（2.1.19）を代入すると（2.1.40）を記述できる．点の移動距離の微分（2.1.40）の右辺を展開すると（2.1.41）になる．点の移動距離の微分（2.1.18）は接線の方程式であるので，その接線の関数を（2.1.42）で記述する．接線の関数（2.1.42）で微分（2.1.41）の左辺は（2.1.43）で記述できる．(2.1.43) の右辺を (2.1.41) の左辺に代入すると接線の方程式 (2.1.44) を記述できる．接線の方程式 (2.1.44) を整理すると接線の関数（2.1.45）を記述できる．

$$\mathrm{d}l(t)(h_t)=v_{\mathrm{wave}}(t)\cdot(t_{\mathrm{tangent}}-t)\cdots(2.1.40)^*$$

$$\mathrm{d}l(t)(h_t)=v_{\mathrm{wave}}(t)\cdot t_{\mathrm{tangent}}-v_{\mathrm{wave}}(t)\cdot t\cdots(2.1.41)^*$$

$$l_{\mathrm{tangent}}(t_{\mathrm{tangent}})\cdots(2.1.42)$$ 接線の関数

$\mathrm{d}l(t)(h_t) = l_{\mathrm{tangent}}(t_{\mathrm{tangent}}) - l_{\mathrm{tangent}}(t) \cdots (2.1.43)$*

$l_{\mathrm{tangent}}(t_{\mathrm{tangent}}) - l_{\mathrm{tangent}}(t) = v_{\mathrm{wave}}(t) \cdot t_{\mathrm{tangent}} - v_{\mathrm{wave}}(t) \cdot t \cdots (2.1.44)$ 接線の方程式

$l_{\mathrm{tangent}}(t_{\mathrm{tangent}}) = v_{\mathrm{wave}}(t) \cdot t_{\mathrm{tangent}} + l_{\mathrm{tangent}}(t) - v_{\mathrm{wave}}(t) \cdot t \cdots (2.1.45)$

接線の関数（2.1.45）の傾きが，（2.1.46）のように，定数であることを仮定する．点の速さが（2.1.46）のように定数であるならば点の移動距離は（2.1.47）のように記述できる．図 2.1 の正円上に仮定した点が等速運動をしているならば条件（2.1.48）が成立する．条件（2.1.48）を（2.1.24）の右辺に代入すると（2.1.49）を記述できる．(2.1.23) を (2.1.49) の左辺に代入して (2.1.43) を (2.1.49) の右辺に代入すると (2.1.50) を記述できる. 点の移動距離 (2.1.47) は或る位置を通過した波の長さであり，波の移動距離でもある．

$v_{\mathrm{wave}}(t) = \mathrm{const.} \cdots (2.1.46)$

$\Delta l = v_{\mathrm{wave}}(t) \cdot \Delta t \cdots (2.1.47)$ 点の移動距離

$\alpha_l(t; h_t) = 0 \cdots (2.1.48)$ 等速運動の場合の条件

$\Delta l(t; h_t) = \mathrm{d}l(t)(h_t) \cdots (2.1.49)$*

$l(t + h_t) - l(t) = l_{\mathrm{tangent}}(t_{\mathrm{tangent}}) - l_{\mathrm{tangent}}(t) \cdots (2.1.50)$

点の移動距離の関数（2.1.2）でのグラフの接点では接線の関数に等しい値であるので（2.1.51）が成立する．接点の値（2.1.51）を（2.1.50）に代入すると（2.1.52）を導出できる．（2.1.52）では，点の移動距離の関数（2.1.2）は接線の関数（2.1.42）に等しいことを示している．

$l(t) = l_{\mathrm{tangent}}(t) \cdots (2.1.51)$ 接点の値

$l(t_{\mathrm{tangent}}) = l_{\mathrm{tangent}}(t_{\mathrm{tangent}}) \cdots (2.52)$ 正円に仮定した点の移動距離は（2.1.30）で直線の関数（2.1.42）に等しい．

点の移動距離の微分（2.1.18）は波の速さ（2.1.53）に書き換えることができる．点の速さは０以上の値であるので（2.1.14）から（2.1.54）になる．（2.1.54）を使用すると（2.1.53）は（2.1.55）になる．図 2.1 の正円上に仮定した点の移動距離は増加するので (2.1.55) を満足する. 図 2.1 の正円の半径 (2.1.3) を使用すると (2.1.54) は (2.1.56) であることになる．（2.1.56）では角振動数（2.1.5）は０以上の実数であることを意味する．

$\dfrac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{wave}}(t), (\mathrm{d}t(h_t) \neq 0) \cdots (2.1.53)$ 微分で記述した波の速さ

$v_{\mathrm{wave}}(t) = r \cdot \omega(t) \geq 0 \cdots (2.1.54)$

$\dfrac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t} \geq 0 \cdots (2.1.55)$

$\omega(t) \geq 0 \cdots (2.1.56)$ 角振動数の値域

2.2　正円上の点で定義する波長（wavelength）

弧度は図 2.2.1 のような原点 O の周りを１回転すると２πrad である．そのように１回転した距離――円周の長さのこと．――に波長と呼ぶ量（2.2.1）を仮定する．同様に１回転した時間を周期として考えることで（2.2.2）を記述するものと仮定する．

$\lambda \cdots (2.2.1)$ 波長

$T \cdots (2.2.2)$ 周期

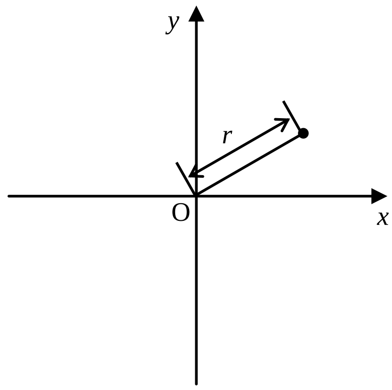


図 2.2.1　波を考える直交座標系上の点

波を図 2.1 のような直交座標系の各軸上の点で表現することは，２章で説明した．１周期の間に点が進む距離を波長として計算できることを仮定する．このことを（2.2.3）で記述する．

$$\lambda = \int_0^T v_{\mathrm{wave}}(t) \cdot \mathrm{d}t \cdots (2.2.3)$$

波の速さは２章で（2.1.13）で記述できることを説明した．図 2.1 の正円上に仮定した点の速さが波の速さ（2.1.13）に等しいので，リーマン積分可能（Riemann integrable）な関数である（2.1.13）を使用して（2.2.4）を記述できる．（2.2.4）の左辺では，図 2.1 の正円上に仮定した点が原点 O の周りを１回転する場合のリーマン積分（Riemann intrgral）である．（2.2.4）の右辺では，そのような点が速さ（2.1.13）で１回転するまでに移動する距離である．（2.2.4）の左辺は（2.2.5）になる．角振動数（2.1.5）および記号（2.2.2）を使用すると（2.2.6）を記述できる．（2.2.4）の左辺に（2.2.5）を代入すると（2.2.7）を記述できる．（2.2.7）の右辺の波の速さ（2.1.5）を記述している角振動数（2.1.5）が変化する場合も仮定していることからリーマン積分の記述のままで議論をする．図 2.1 の正円では，半径（2.1.3）が定数であるので（2.2.7）の右辺は（2.2.6）の右辺のリーマン積分の値で決定できる．（2.2.6）の左辺は２πであるので（2.2.7）の左辺になることは明らかである．（2.2.7）では図 2.1 の正円上を定数でない速さ（2.1.13）で移動した場合での点の移動した距離が正円の円周の長さに等しいことを示している．

$$v_{\mathrm{wave}}(t) = r \cdot \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \cdots (2.1.13) \text{波の速さ}$$

$$r \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \mathrm{d}\theta = \int_0^T v_{\mathrm{wave}}(t) \cdot \mathrm{d}t \cdots (2.2.4)$$

$$r \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \mathrm{d}\theta = 2 \cdot \pi \cdot r \cdots (2.2.5)$$

$$\omega(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdots (2.1.5)$$

$$\int_0^{2\cdot\pi} \mathrm{d}\theta = \int_0^T \omega(t) \cdot \mathrm{d}t \cdots (2.2.6)$$

$$2 \cdot \pi \cdot r = \int_0^T v_{\mathrm{wave}}(t) \cdot \mathrm{d}t \cdots (2.2.7)$$

$$r = \mathrm{const.} > 0 \cdots (2.1.3)$$

（2.2.7）では正円の半径（2.1.3）が定数であった．図 2.2.1 のような原点 O の周りで１回転する間に点と原点 O との距離を自由に変化させる場合について考える．このような場合では，図 2.2.2 のような波形（waveform あるいは waveshape）の波は逆時計回りに１回転することでは描くことができない．図 2.2.2 のような波形を描くように原

点Ｏの周りを自由に移動する点を仮定すると，その点の位置を弧度のみで直感的に知ることができなくなる．その波形のみを観察しても原点Ｏの周りを動いた点の位置が分からない．このようなことでは，波の周期および波長の決定をすることができない．たとえば，その点を観察することで点が原点Ｏの周りを１回転する時間を波の周期として仮定する．その１周期の間に描いた波の長さを波の波長とするものと仮定する．図 2.2.2 のような波形の繰り返しを観測した場合を仮定する．図 2.2.2 のような波は，原点Ｏの周りを１周することでのｙ軸の値では描けない．原点Ｏの弧度がπrad から２πrad の間はｙ軸が負の値になるが図 2.2.2 には負の値は描いていない．ｘ軸についても同様に考えることができる．もし，ｙ軸の値で図 2.2.2 のような波を描こうとするならば弧度がπrad から２πrad の間を通過する時間が必要になり，図 2.2.2 のような波を続けて繰り返し描くことはできない．このような周期および波長の決定についての問題を解決するのに，フーリエ級数理論の使用でひとつの解決を与えることができる．フーリエ級数理論では，２章１節で触れた三角関数の直交系を使用して，一般の波が記述できる．その理論を応用できるので，そのような直交系を与える三角関数の正弦および余弦で描く波に周期および波長を定義する．このような周期および波長の定義を使用して，一般の波を記述できる正弦波の関数を定義できる．そして，そのような一般の波を構成している直交系の正弦波の周期および波長を知ることが一般に物理学で波長および周期を知ることになる．このような波の周期および波長は正弦波に定義することを本書で以下に示す．正弦波については，本書の次に発行するファイルで，負の弧度について考える際に本書の２章より詳しく扱う．

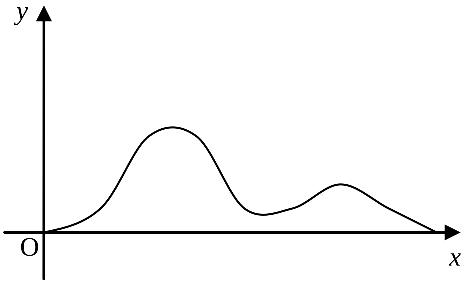


図 2.2.2　波の波長および周期の説明

正弦波（2.2.8）――三角関数の余弦で与える（2.2.9）も同様である．――は図 2.1 の正円上を点が等速（2.1.46）で移動することで描くことができる．図 2.1 の正円の円周は（2.2.10）である．その円周の長さ（2.2.10）を正弦波（2.2.8）および（2.2.9）の波長（2.2.11）として著者が独自に構築する波の理論では定義する．この正円上を１回転する点の時間は正弦波の周期（2.2.2）である．

$r \cdot \sin\theta \cdots (2.2.8)$ 正弦波

$r \cdot \cos\theta \cdots (2.2.9)$

$v_{\mathrm{wave}}(t) = \mathrm{const.} \cdots (2.1.46)$

$2 \cdot \pi \cdot r \cdots (2.2.10)$ 正円の円周の長さ

$\lambda \equiv 2 \cdot \pi \cdot r, (0 < \lambda < \infty) \cdots (2.2.11)$ 正弦波の波長の定義

正弦波では，図 2.1 の正円上を点が等速（2.1.46）で移動するので（2.2.12）で波の速さを記述する．（2.2.3）の右辺に（2.2.12）の左辺を代入すると（2.2.13）になる．波の速さが（2.1.54）であるので（2.2.12）の場合では角振動数が（2.2.14）のように定数である．波長（2.2.13）の右辺は定数である波の速さ（2.2.12）でのリーマン積分なので（2.2.15）になる．

$v_{\omega_T} = v_{\mathrm{wave}}(t) = \mathrm{const.}, (v_{\omega_T} \neq 0) \cdots (2.2.12)$

$\lambda = \int_0^T v_{\omega_T} \cdot \mathrm{d}t \cdots (2.2.13)$

$v_{\text{wave}}(t) = r \cdot \omega(t) \geq 0 \cdots (2.1.54)$

$\omega_T = \omega(t) = \text{const.} \cdots (2.2.14)$

$\lambda = v_{\omega_T} \cdot T \cdots (2.2.15)$ 等速で移動する波の波長

2.3　正円上の点で定義する振動数（frequency）

著者が独自に構築している本書の波の理論では正弦波の周期――波の周期である．――を（2.3.1）で定義する．正弦波の波長の定義（2.2.11）を正弦波の周期の定義（2.3.1）の分子の波長に代入すると（2.3.2）になる．

$T \equiv \dfrac{\lambda}{v_{\omega_T}}\,\text{s}, (v_{\omega_T} \neq 0) \cdots (2.3.1)$ 正弦波の周期の定義

$T = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_{\omega_T}} \cdots (2.3.2)$

周期（2.3.2）は波の速さ（2.3.3）に書き換えることができる．波の速さ（2.1.54）を使用すると波の速さ（2.3.3）は（2.3.4）に等しいものと扱うことができる．

$v_{\omega_T} = r \cdot \dfrac{2 \cdot \pi}{T} \cdots (2.3.3)$

$v_{\text{wave}}(t) = r \cdot \omega(t) \geq 0 \cdots (2.1.54)$

$v_{\omega_T} = r \cdot \omega_T \cdots (2.3.4)$

正弦波の周期の定義（2.3.1）を使用して正弦波の角振動数を記述できる．波の速さ（2.3.3）の右辺には正弦波の周期（2.3.1）の逆数を記述している．周期（2.3.1）を使用すると，その逆数は（2.3.5）で記述できる．（2.3.5）は単位時間に波が進んだ距離を正弦波の波長に比している．正弦波の波長は（2.2.11）で正円の円周の長さであるものと定義した．正円の周りを１回転すると図 2.1 の各軸上の点は初期に在った位置に戻る振動を示している．このような解釈では，（2.3.5）は振動の数を示しているものと考えることができる．著者が独自に構築している本書の波の理論では（2.3.5）を正弦波の振動数として定義する．振動数（2.3.5）は周波数とも呼ばれることもある．振動数（2.3.5）の単位はＳＩで使用されるもので hertz であり，その記号は Hz である．Hz はＳＩで導出できるものである．（2.3.5）は，波の速さおよび波長で定義をしているのでＳＩから導出可能である．文献１０では Hz は $\dfrac{1}{\text{s}}$ としてＳＩとの関係を表示している．正弦波の周期（2.3.1）および正弦波の振動数（2.3.5）は（2.3.6）の関係にあることはすでに触れた．

$\nu \equiv \dfrac{v_{\omega_T}}{\lambda}\,\text{Hz}, (\lambda \neq 0) \cdots (2.3.5)$ 正弦波の振動数

$\nu = \dfrac{1}{T}, (T \neq 0) \cdots (2.3.6)$

正弦波の振動数（2.3.6）を波の速さ（2.3.3）の右辺に代入すると（2.3.7）になる．波の速さ（2.3.4）および波の速さ（2.3.7）の右辺を比較すると角振動数（2.3.8）を導出できる．角振動数（2.3.8）の右辺に振動数（2.3.6）の右辺を代入すると（2.3.9）になる．角振動数（2.2.14）が定数であるので角振動数（2.3.9）の右辺に記述してある周期は（2.3.10）のように定数である．

$v_{\omega_T} = r \cdot (2 \cdot \pi \cdot \nu) \cdots (2.3.7)$

$\omega_T = 2 \cdot \pi \cdot \nu \cdots (2.3.8)$ 正弦波での角振動数および振動数の関係式

$$\omega_T = \frac{2\cdot\pi}{T}\cdots(2.3.9)$$

$$T = \text{const.}\cdots(2.3.10)$$

（2.3.10）で，一般の基礎物理学での正弦波（2.2.8）の周期（2.3.1）および振動数（2.3.5）は定数であることになる．このことについては本節の最後に考察する．

波の速さ（2.1.9）では，図 2.1 の正円上に仮定した点の移動距離（2.1.2）および角振動数（2.1.5）が角度（2.1.4）で記述できることは明らかである．フーリエ級数理論を導入すると，図 2.1 の正円上を等速（2.1.46）で移動する点で描く正弦波を基礎にして，一般の波を記述できることはすでに指摘した．このことで，半径（2.1.3）の正円で角振動数（2.1.5）が定数になる点の弧度との関係を速さ（2.1.9）で得ることを示す．

$$v_{\text{wave}}(t) \equiv \lim_{h_t\to 0}\frac{l(t+h_t)-l(t)}{h_t}\cdots(2.1.9)$$——正円上に仮定した点で定義する——波の速さの定義

$$l(t) = r\cdot\theta(t) \ge 0\cdots(2.1.2)$$

$$\omega(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\text{rad}}{\text{s}}\cdots(2.1.5)$$

$$\theta(t) \ge 0\cdots(2.1.4)$$

$$v_{\text{wave}}(t) = \text{const.}\cdots(2.1.46)$$

$$r = \text{const.} > 0\cdots(2.1.3)$$

正弦波の波の速さは（2.1.46）のように定数である．このことで，（2.3.4）を記述した．リーマン積分可能な角振動数（2.1.5）を使用すると，リーマン積分（2.3.11）を記述できる．（2.3.11）では（2.1.54）が成立することになる．

$$\int_{\theta_{t_s}}^{\theta_{t_e}}\mathrm{d}\theta = \int_{t_s}^{t_e}\omega(t)\cdot\mathrm{d}t\cdots(2.3.11)$$

$$v_{\text{wave}}(t) = r\cdot\omega(t) \ge 0\cdots(2.1.54)$$

（2.3.11）の右辺に（2.2.14）の左辺を代入すると（2.3.12）になる．（2.3.12）の左辺は，角度の差（2.3.13）を記述できる．（2.3.11）の右辺は，（2.3.14）に書き換えることができる．（2.3.14）の右辺は（2.3.15）の右辺になる．

$$\int_{\theta_{t_s}}^{\theta_{t_e}}\mathrm{d}\theta = \int_{t_s}^{t_e}\omega_T\cdot\mathrm{d}t\cdots(2.3.12)$$

$$\int_{\theta_{t_s}}^{\theta_{t_e}}\mathrm{d}\theta = \theta_{t_e} - \theta_{t_s}\cdots(2.3.13)$$

$$\int_{t_s}^{t_e}\omega_T\cdot\mathrm{d}t = \omega_T\times\int_{t_s}^{t_e}1\cdot\mathrm{d}t\cdots(2.3.14)$$

$$\omega_T\times\int_{t_s}^{t_e}1\cdot\mathrm{d}t = \omega_T\times(t_e - t_s)\cdots(2.3.15)$$

（2.3.13）を（2.3.12）の左辺を代入して，（2.3.15）の右辺を（2.3.12）の右辺に代入することで（2.3.16）を記述できる．角振動数（2.3.8）を（2.3.16）の右辺に代入すると（2.3.17）になる．正弦波の振動数（2.3.5）を代入すると（2.3.18）になる．角度の差（2.3.18）の右辺には波の速さ（2.1.9）を記述している．

$$\theta_{t_e} - \theta_{t_s} = \omega_T\times(t_e - t_s)\cdots(2.3.16)$$

$$\theta_{t_e} - \theta_{t_s} = 2\cdot\pi\cdot\nu\cdot(t_e - t_s)\cdots(2.3.17)$$

$$\theta_{t_e}-\theta_{t_s}=2\cdot\pi\cdot\frac{v_{\omega_T}}{\lambda}\times(t_e-t_s)\cdots(2.3.18)$$

角度の差は位相差と呼ぶことができる．波の速さ（2.2.12）は位相差（2.3.18）を記述できるので位相速度（phase velocity）と呼ぶことができる．

正弦波の振動数の定義（2.3.5）を書き換えると正弦波の波の速さ（2.3.19）を記述できる．（2.3.19）は一般的な波の速さ，振動数および波長の関係式である．正弦波では，（2.2.15）は（2.3.19）に書き換えることができる．

$$\nu\equiv\frac{v_{\omega_T}}{\lambda}\ \mathrm{Hz},(\lambda\neq 0)\cdots(2.3.5)$$正弦波の振動数

$$v_{\omega_T}=\nu\cdot\lambda\cdots(2.3.19)$$一般的な関係式

$$\lambda=v_{\omega_T}\cdot T\cdots(2.2.15)$$等速で移動する波の波長

本書の理論で正弦波として扱う（2.2.8）および（2.2.9）の弧度は図 2.1 の正円で定義する．その正弦波の定義は「理論物理学での波の関数２」で与えるが，ここでは正弦波の重要な特性について説明をする．

$$r\cdot\sin\theta\cdots(2.2.8)$$正弦波

$$r\cdot\cos\theta\cdots(2.2.9)$$

弧度は（2.1）で定義した．弧度（2.1）から時点を独立変数とする弧度の関数を（2.3.20）で記述できるものと仮定する．（2.3.20）での右辺の弧の長さ$l(t)$――図 2.1 の正円の円周上に仮定した点の移動距離である．――が微分可能な関数である場合で，その点が自由に移動した場合でも弧度（2.3.20）を記述できる．

$$\theta\equiv\frac{l}{r}\ \mathrm{rad},(r\neq 0)\cdots(2.1)$$

$$\theta(t)=\frac{l(t)}{r}\ \mathrm{rad},(r\neq 0)\cdots(2.3.20)$$

このことは，図 2.1 の正円の円周上に仮定した点が定数でない速さで移動する場合を含む．その場合で，図 2.1 の各軸上の点の関数――（2.12）および（2.13）の関数のこと．――は或る自由な曲線を描くことができる．ただし，自由な程度は正円の半径（2.1.3）で規制を与えられることになる．正円上での点の速さは（2.1.54）であるものと仮定するので，角振動数は（2.1.56）を満足する．

$$(0,y(\theta))\cdots(2.12)$$

$$(x(\theta),0)\cdots(2.13)$$

$$r=\mathrm{const.}>0\cdots(2.1.3)$$

$$v_{\mathrm{wave}}(t)=r\cdot\omega(t)\geq 0\cdots(2.1.54)$$

$$\omega(t)\geq 0\cdots(2.1.56)$$角振動数の値域

波長を図 2.1 の円周の長さであるものと仮定する．図 2.1 の正円上に仮定した点を観察したときに正円の半径を計算できるならば，そのような波長は与えることができる．波の形からでは波長となる部分がわからない．波の最大振幅――（2.2.8）では半径（2.1.3）のこと．――から正円の円周の長さを計算して観測した波の波長を決定できることはある．弧度（2.3.20）を（2.3.21）に書き換える．正弦波の波長の定義（2.2.11）を使用すると弧度（2.3.21）は（2.3.22）に書き換えることができる．

$$\theta(t) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{l(t)}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdots (2.3.21)$$

$\lambda \equiv 2 \cdot \pi \cdot r, (0 < \lambda < \infty) \cdots (2.2.11)$正弦波の波長の定義

$$\theta(t) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{l(t)}{\lambda} \cdots (2.3.22)$$

弧度（2.3.22）の微分係数を計算すると（2.3.23）になる．波の速さの定義（2.1.9）を使用すると（2.3.23）は（2.3.24）に記述できる．角振動数（2.1.5）を使用することで，弧度（2.3.24）は（2.3.25）に記述できる．（2.3.25）には角振動数，波長および波の速さを記述している．（2.3.25）では周期および振動数を定義できていない．波の形が定まらないことでは波の波長になる部分は一般にはわからない．波長を円周から算出して波長を使用して時点の軸上の時間で周期を計算することを仮定する．そのような周期を導入しても波が周期的に繰り返されないならば周期で波の変化を知ることができない．この場合では，波の関数を周期で記述すらできない．（2.3.25）の右辺には速さを記述しているが，波が周期的に繰り返しているならば値が変化する波の速さを関数として記述できる．そのように波の速さを記述することで（2.3.25）では角振動数は時点に対応して変化することも認めることになる．この議論の仮定では波は円の半径が変化しないで正円上を移動するので，どのように波が描かれるのかはわからない．

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t} \cdots (2.3.23)$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot v_{\mathrm{wave}}(t) \cdots (2.3.24)$$

$$\omega(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdots (2.1.5)$$

$$\omega(t) = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot v_{\mathrm{wave}}(t) \cdots (2.3.25)$$

もし，図 2.1 の正円上の点が１回転するまでの波の速さ（2.1.9）が周期的に繰り返すならば（2.3.25）の右辺から角振動数（2.3.25）を記述できる．このような周期的な繰り返しが有るならば波の形に規則性を見出すことができる．この規則性に周期および振動数を仮定できる．周期が波の繰り返す時間から計算できる．その周期の逆数を振動数とする場合は，すでに定義した周期（2.3.2）および振動数（2.3.5）との関係（2.3.6）に一致する．波の速さとして扱う図 2.1 の正円上の点の速さが時点に対して変化することで波の曲線を描く各点の速さが異なる個所が生じる．このことでは，波の速さになる関数（2.1.54）は波の関数の点を指定したうえでの波の点の速さを意味する．波の関数の値を指定することは時点を使用して可能であるものと仮定できる．その指定した値の点を波として解析することに結び付ける理論がなければ，そのように解析をする必要性を説明できない．このような点の移動を考えるならば波ではなく各座標軸上の点の移動――点の振動現象として考えることも有り得る．――として解析する際に微分積分学を応用することで十分なことも有る．質点の力学で計算できる場合は波として扱う必要性すら生じないことも考えられる．このために，一般に（2.3.25）が記述できるだけでは波として扱うことを著者は考えない．２０１１年８月現在，本書の波の理論にも特に導入する計画はない．

$$v_{\mathrm{wave}}(t) = r \cdot \omega(t) \geq 0 \cdots (2.1.54)$$

$$\nu = \frac{1}{T}, (T \neq 0) \cdots (2.3.6)$$

物理学の術語として波長（2.2.11）を使用することで，波の周期的に描く波列（wave train）を扱う際に，波の速さ

(2.2.12)，周期（2.3.1）および振動数（2.3.5）を関係式（2.3.19）で計算できる．波の長さを波の型で波長ごとに認識できることにもなる．波の形が上述のように自由に描かれて周期および周波数も与えることができないのに波長を図 2.1 の正円の円周の長さとして定めても，他の重要視する物理量との関係を得られないことでは理論物理学での意義を見出すことができないものと著者は考える．角振動数（2.3.25）を記述できても波として扱う必要性を見い出せないようでは波の理論に，そのような場合の波長を定義することを著者はしない．

$v_{\omega_T} = v_{\mathrm{wave}}(t) = \mathrm{const.}, (v_{\omega_T} \neq 0) \cdots (2.2.12)$

上述の考察では波長を決定してから波の周期を決定している．次に，波の周期を決定して波長を決定することを考える．波の周期の間に波が波長分の移動をするものとして波長を考えると，図 2.1 の正円上に仮定した点の速さが変化することで波の型が変化する．波の型が決定しないように図 2.1 の正円上の点が移動する場合を仮定する．波列に型となる波の形を見つけ出し，その型となる波の長さに波長を考えることがある．このことでは，波の型が決定しないように図 2.1 の正円上の点が移動するならば波の波長を決定できない問題が生じる．波長が決定できない問題に周期が決定できない問題との関係が生じることになる．もし，波の型と波長の決定を切り離して考えるならば次のように著者は考える．図 2.1 の正円に仮定した点が１回転した時間を周期とするならば，その周期の間に波の波長は円周の長さに等しくなる．このことでは，波の型は決定できないが波長は決定できることになる．波が型を周期的に繰り返すことで波列ができるものとして周波を考えるならば，そのような波には周波を考えることができないが波長および周期を定義できることになる．この意味では周波数に相当する量を導入できないものと考えることができる．周波数が周期の逆数であるならば，周期が定義できるのに周波数が定義できないことでは矛盾を生じるものと一般には扱うことができる．そして，１周期――１周期の決定の方法は不明である．――に図 2.1 での正円上の点の移動した距離が波長であるものと扱える余地がある．この場合では，周期が定義できないならば波長も定義できなくなる．波の型が決定できないことで，点が円周上で１回転した情報を波の型から計算できない．周期が分かるならば波の図から時間を読んで波長は計算できる場合がある．この場合では，周期を決定してからでなければ波長が計算できない．波の型が分らなくても波の図から波の形は分かる場合がある．この場合では，波の形から周期を決定する方法が必要になる．このように周期を知る必要が生じるが，波の形を起源とした周期を定義できる一般の理論はないものと著者は考える．

２０１１年８月現在，これらの考察のように意義を見出せないことで波の速さが変数になる場合の点の振動に対して波長を定義する必要性を著者は認めていない．このことから，そのような波に波長，周波数および周期を定義することは著者が独自に構築している波の理論ではしない．これらの理由があり，一般に理論物理学の正弦波（2.2.8）――（2.2.9）も同様である．――では角振動数が定数である場合を扱うものと著者は考える．このことで，波長，周波数および周期などの物理量を定義できる．さらに，フーリエ級数理論を使用して一般の波に理論的計算を考えることができる．フーリエ級数で記述した波の関数には，数学で与えた周期関数としての周期を理論物理学で一般に使用できる．一般の波に理論物理学での周期，振動数および波長を定義しなくても，フーリエ級数で正弦波の速さ，波長および振動数を使用して波を解析できる．

本書のように正弦波の波長，周期および振動数を定義することで，正弦波は正円の円周上を等速で回転する点で描くことができる．その正弦波は，現実世界で観測できる現象の波よりも単純な波形および振動――座標軸上の点での振動のこと．――を一般に示すものと考えることができる．このような観測結果での事実との比較からは，本書で定義した正弦波を，数学的技術として，理論物理学での波の解析のために生み出された波の型として扱うことができる．

３　あとがき

著者の記憶では，２０１１年８月現在の日本の基礎物理学での専門書では２章のように正弦波の波長，振動数および周期を定義して説明しているものを知らない．このことは，著者が独自に構築している波の理論の特長として２０１１年現在の著者は考えている．２章の説明では，そのように定義を明確に与えていることで意義を指摘できるが理論物理学で与える正弦波の定義としては不十分である．２章で定義した弧度は０以上の実数で定義している．２ 章で説明したように付録ｉ.のフーリエ級数を応用して一般の波の関数を記述する．このような応用では，弧度を負の実数で使用できるように拡張する必要がある．このためにも，著者の構築している波の理論では弧度を負の値に拡張して使用する．本書の理論で使用する正弦波の弧度を正負の両符号で定義したのちに，正弦波の定義を与えることにした．次に発行するファイルである「理論物理学での波の関数２」では，負の弧度の定義および正弦波の定義をする．そのファイルの付録でフーリエ級数の係数を導出および本書の理論での振動数と数学書での振動数との異なる個所について説明する．

付録

ｉ．フーリエ級数

（a.1.1）はリーマン積分可能な周期関数（periodic function）であるものと仮定する．（a.1.1）では，その関数は複素数で記述できる場合も仮定できるものとする．周期関数として扱う場合の（a.1.1）の独立変数は（a.1.2）のように区間内の実数であるものと仮定する．（a.1.2）の角度は，一般には弧度で記述する．　フーリエ級数理論を使用して一般の波を記述できる．

$$f(\theta) \in \mathbf{C} \cdots (\mathrm{a}.1.1)$$

$$\theta \in [0, 2\cdot\pi] \cdots (\mathrm{a}.1.2)$$

実数の有限な区間内を定義域とするリーマン積分可能な一般的な関数――複素数を値域にしてもよい．――に漸近的に等しい関数を，フーリエ級数は正弦関数および余弦関数を使用して記述できる．このことを説明するために，（a.1.1）を一般的な関数として仮定する．数学の理論上では周期関数を使用してフーリエ級数を論じることになる．周期関数の周期は弧度で記述できる．弧度にはリーマン積分可能な一般の関数の独立変数 t に対応する関数（a.1.3）を記述できる．弧度（a.1.3）の独立変数は実数であるものと仮定する．その関数（a.1.3）には，その独立変数 t の関数を使用する有限の区間内に周期が対応するように定義を与える．この仮定で，その関数を使用する有限の区間内でリーマン積分可能な一般の関数に漸近的に等しい関数――この場合では（a.1.4）のように合成関数で記述できる．――を周期関数のように（a.1.1）のフーリエ級数（a.1.5）で記述できる．

$$\theta(t), (t \in \mathbf{R}) \cdots (\mathrm{a}.1.3)$$

$$(f \circ \theta)(t) \in \mathbf{C} \cdots (\mathrm{a}.1.4)$$

$$f(\theta) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m(f)\cdot\sin(m\cdot\theta) + b_m(f)\cdot\cos(m\cdot\theta) \right) \cdots (\mathrm{a}.1.5)$$

フーリエ級数（a.1.6）にはフーリエ係数（Fourier coefficients）と呼ばれる定数である（a.1.6）～（a.1.8）の係数を仮定している．フーリエ係数（a.1.7）～（a.1.9）は「理論物理学での波の関数２」の付録で導出する．簡単に説明すると，内積（a.1.10）を定義しているベクトル空間内の区間（a.1.2）で定義される滑らかで連続な周期関数としての（a.1.1）がリーマン積分可能である場合はフーリエ級数（a.1.6）が収束して（a.1.11）が成立する．

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m(f)\cdot\sin(m\cdot\theta) + b_m(f)\cdot\cos(m\cdot\theta) \right) \cdots (\mathrm{a}.1.6)$$

$$\frac{a_0(f)}{2}\cdots(\mathrm{a}.1.7)$$

$$a_m(f)\cdots(\mathrm{a}.1.8)$$

$$b_m(f)\cdots(\mathrm{a}.1.9)$$

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}(f\cdot\bar{g})(x)\,\mathrm{d}x\cdots(\mathrm{a}.1.10)$$

$$f(\theta)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m(f)\cdot\sin(m\cdot\theta)+b_m(f)\cdot\cos(m\cdot\theta)\right)\cdots(\mathrm{a}.1.11)$$

参考文献

１） 富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 第１回”
２） 富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 第２回”
３） 富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 第３回”
４） 富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 第４回”
５） 富岡和人，“電位の簡単な入門 2007 第５回”
６） 富岡和人，“電位の簡単な入門 2007Option”
７） 富岡和人，“特殊相対性理論の速度の変換”，pp.32−35.
８） 富岡和人，“特殊相対性理論のエネルギーの変換と相対論的質量の変換”，pp.61−94.
９） Vladimir A.Zorich，Roger Cooke(Translator)，2004：Mathematical Analysis Ⅰ，Springer，pp.178−181，pp.182−183.
１０）Bureau international des poids et mesures：The International System of Units(SI) 8th edition 2006，p.118. （http:// www）.bipm.org/utils/common/pdf/si_brochure_8.pdf
１１）富岡和人，“AL_COM.CVSyst.1 on Dec. 27, 2006”，循環系に関する研究報告，(2006−12−27)，pp.8−10.
１２）富岡和人，“AL COM.CVSyst.2 on Dec. 25，2008”，循環系に関する研究報告，(2008−12−25)，pp.6−10.
１３）富岡和人，“循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第一回”
１４）富岡和人，“循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第二回”
１５）富岡和人，“循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第三回”

理論物理学での波の関数１　富岡和人（とみおかかずひと）著

作成日：2011 年 08 月 07 日
発行日：2011 年 08 月 07 日

ホームページ
http://www.alifecom.info/
http://book.geocities.jp/alifecominfo/
http://alifecominfo.aikotoba.jp/

特殊相対性理論のページ
http://www.alifecom.info/relativity.htm
http://book.geocities.jp/alifecominfo/relativity.htm
http://alifecominfo.aikotoba.jp/relativity.htm

波のページ
http://www.alifecom.info/theoryofwaves.htm
http://book.geocities.jp/alifecominfo/theoryofwaves.htm
http://alifecominfo.aikotoba.jp/theoryofwaves.htm