

# 電位の簡単な入門 2007

## No.4

### ——電位差のお話し——

A LIFE COM. バイオ研究室

富岡和人

#### 1. まえがき

本書の第4回では電位差のお話しをする。第2章で電位差を定義する。前回——本書の第3回——で定義した電位を使用して電位差の定義を与える。前回では、本書の電位の定義が、著者が大学生のころに読んだ電磁気学での電位の説明とは異なることを主張した。電位の説明が異なる箇所から、電位の解釈が異なる箇所が生じている。このことから、電位差の解釈が異なる部分がある。著者が大学生のころに読んだ電磁気学の指導では、電位差を明確に定義した後に電位差を説明することすらないものもあった。電位差の定義を与えることなく電位の差として扱くと、電位差の解釈が異なるものになる可能性がある。本書では電位差を明確に定義した。電位差を説明する際に、電位を定義した静電場を生じる質点系を与えた。そのような質点系を2つ仮定して、異なる質点系からそれぞれ生じる静電場内の電位を2つ使用して電位差を説明した。電気回路内の電位差の変化を説明する際に応用できるものと著者は考えたので、異なる質点系で説明できる異なる静電場内の電位を使用した。そして、ひとつの静電場ベクトルで、そのように異なる質点系から生じる静電場を説明できる場合を仮定した。2章では、前回で説明をした電位の重ね合わせの原理を使用する。第4回の2章から4章までは、その仮定を使用して電位差についての説明をした。電位差と静電的ポテンシャルエネルギーの変化量との関係を第3章で説明する。3章では、一般的な場合で電位と静電的ポテンシャルエネルギーの関係を説明した。そして、その説明を使用して、2章で仮定した質点系を使用した電位の関係を説明した。前回で静電場から電位を計算できることを示した。その説明では、静電場から電位を計算する方法を技術として扱った。4章でも静電場の積分から電位差を記述できることを示した。その積分を技術として扱い、電位差の定義としては扱っていない。静電場から電位差を計算できる積分の考察をする準備として、点電荷のもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量での点電荷の移動の説明をした。点電荷のもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量の解釈が電位差の解釈とは異なる箇所を説明した。そのように技術として扱う——静電場から電位差を説明する式——積分を使用すると、点電荷の移動についての電位差を説明できる。電位および電位差を定義したので電位の値が等しい場合について扱うことができる。第5章で等電位面と呼ぶ電位の値が等しい面について説明する。そこでの説明でも4章での技術を使用している。第6章では、電位から静電場を計算する場合についての説明を静電場と等電位面との直交関係を使用して与えた。電位差、静電的ポテンシャルエネルギーおよび静電場での力学的エネルギー保存の法則の考察ができる。第7章では力学的エネルギー保存の法則での電位差について説明する。導体を使用した電気の回路を扱うことがある。このようなことから、第8章では導体の電位差の説明をする。導体について2つの前提を与えて、導体系での一意性および重ね合わせの原理を説明する。さらに、点電荷で構成している系の静電的ポテンシャルエネルギーの式の使用で、導体系の静電的ポテンシャルエネルギーの式を導出する。この後で、静電場を計算するためにガウスの法則を説明する。本書の第2回の2章で説明した静電場の計算方法よりもガウスの法則を使用する方法は電場の計算を容易にすることがある。静電場および電位差を使用して、導体での回路素子ではコンデンサを考えることができる。第9章では導体の静電容量について説明をする。そのときに、コンデンサの容量および静電的ポテンシャルエネルギーを計算する。

本書の付録 i では、誘電率が負の場合の電位差について簡単な説明をした。付録 ii では電位係数を使用した導体系の静電的ポテンシャルエネルギーを計算した。付録 iii では線形素子としてのコンデンサの説明をした。付録 iii のコンデンサは時変型のコンデンサの場合で線形素子の計算を示した。付録 iv ではマクスウェルの方程式系について簡単な説明をした。

本書の第 4 回の全体は文献 1 を参考にして作成している。導体については文献 2 を参考にしていて、付録 iii の線形素子については文献 3 を参考にしていて、著者の専攻である循環系の回路モデルの資料として本書は作成している。その資料として文献 4～文献 7 および文献 16 ——ダウンロードは無償である。——がある。文献 4 および文献 16 では、著者の構築した循環系の回路モデル理論で電位差を使用して心臓血管内の内圧の差との関係を与えた。その内圧の差で心臓血管内の血液が移動できることを、電気の回路内の電流が生じることに対応させている。このように心臓血管内の血液の移動を説明するのに使用する内圧の差との関係を与える電位差は、文献 4 および文献 16 でとても重要な量である。付録 iii で説明した時変型のコンデンサには——文献 4 および文献 16 での著者の構築している循環系の回路モデル理論で扱った。——時変型のコンプライアンスとの対応関係を与えている。文献 8～文献 12 は本書——電位の簡単な入門 2007 のこと。——の PDF 文書である。文献 13 は 6 章、8 章および付録 ii での計算をする際に参考にした数学の本である。本書の第 5 回の微分および積分の計算でも、著者は文献 13 から多くを学んで、その知識を使用している。

文献 14 は無限級数について参考にした文献である。第 4 回では無限級数は積分の計算をする際に使用する。8 章の計算で文献 3 を参考にした箇所がある。

文献 13 および文献 15 に無限小の説明がしてある。6 章で無限小を使用している。

本書では‘誤り’がないことを保証はしない。本書の校正の作業は今後も行う予定である。本書の‘誤り’が見つかった際には不定期に改訂を行い発行する予定である。

## 目次

1. まえがき .....	1
目次 .....	3
2. 電位差 (electrostatic potential difference) の定義 .....	4
3. 静電的ポテンシャルエネルギーの変化量と電位差の関係 .....	7
4. 静電場を使用した電位差の計算 .....	12
5. 等電位面 (Equipotential surfaces) .....	20
6. 電位から計算した静電場 .....	21
7. 力学的エネルギー保存の法則と電位差 .....	23
8. 導体 (conductor) .....	24
8.1 導体系の静電的ポテンシャルエネルギー .....	30
8.2 ガウスの法則を使用した同心球および平行平板の電位差の計算 .....	31
9. コンデンサ (condenser) .....	34
10. あとがき .....	39
付録 .....	40
i. 誘電率について .....	40
ii. 電位係数を使用した導体系の静電的ポテンシャルエネルギー .....	40
iii. 線形素子 (linear element) としてのコンデンサについて .....	44
iv. マクスウェルの方程式系 (Maxwell's Equations) について .....	46
参考文献 .....	47
免責事項 .....	47
著作権 .....	47

## 2. 電位差 (electrostatic potential difference) の定義

電位差の定義を (2.1) で与える。前回——本書の第3回——の電位の定義を、(2.1) の定義では使用している。電位差 (2.1) は位置 a の電位と位置 b の電位との差になる。位置 a および位置 b の電位を同時に測定した場合に、電位差の定義 (2.1) を使用することはできる。電位を静電場内の位置に対応するように与えていることから明らかである。このことでは、位置 a および位置 b の電位をそれぞれ異なる時点で測定して、電位差の定義 (2.1) を使用することもできる。

$$\Delta V_{ab} \equiv V_b - V_a \dots (2.1)$$

電位の定義を使用すると、静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置 a の電位を (2.2) で記述できる。(2.2) の右辺の分子は位置 a に仮定した点電荷  $m_{q_p}$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーになる。ただし、(2.2) の分母には点電荷  $m_{q_p}$  のもつ電気量 (2.3) を仮定する。

$$V_a = \frac{U_a}{q_p} \dots (2.2)$$

$$q_p > 0 \text{ C} \dots (2.3)$$

ここで、静電場  $\mathbf{E}_A$  を生じる各点電荷を質点として扱う。その各質点で質点系 A を構成するものと仮定する。質点系 A には静電的ポテンシャルエネルギーが定義されている。静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置 a に点電荷  $m_{q_p}$  を仮定する。静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置で点電荷  $m_{q_p}$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーを (2.4) であるものと仮定する。そして、(2.5) を仮定する。(2.5) の左辺は (2.2) の右辺の分子である。(2.5) の右辺は (2.4) の左辺である。(2.4) については第2回で説明をした。

$$U_{ak} = q_p \times \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{akl}}, (k \geq 2) \dots (2.4) \text{ 静電場 } \mathbf{E}_A \text{ 内の位置で質点 } m_{q_p} \text{ がもつ静電的ポテンシャルエネルギー}$$

$$U_a = U_{ak} \dots (2.5)$$

次に、電位の定義を使用すると、静電場  $\mathbf{E}_B$  内に仮定した位置 a の電位を (2.6) で記述できる。(2.6) の右辺の分子は位置 a に仮定した点電荷  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーになる。ただし、(2.6) の分母には点電荷  $m_q$  のもつ電気量 (2.7) を仮定する。

$$V_a = \frac{U_a}{q} \dots (2.6)$$

$$q > 0 \text{ C} \dots (2.7)$$

静電場  $\mathbf{E}_B$  を生じる各点電荷を質点として扱う。その各質点で質点系 B を構成するものと仮定する。質点系 B には静電的ポテンシャルエネルギーが定義されている。静電場  $\mathbf{E}_B$  内に仮定した位置 a に点電荷  $m_q$  を仮定する。静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置で点電荷  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーを (2.8) であるものと仮定する。そして、(2.9) を仮定する。(2.9) の左辺は (2.6) の右辺の分子である。(2.9) の右辺は (2.8) の左辺である。(2.8) については第2回で説明をした。

$$U_{ai} = q \times \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{aij}}, (i \geq 2) \dots (2.8)$$

$$U_a = U_{ai} \dots (2.9)$$

静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置 a の電位の値は (2.2) の左辺で意味するものとする。静電場  $\mathbf{E}_B$  内に仮定した位置 a の電位の値は (2.6) の左辺で意味するものとする。(2.2) および (2.6) の左辺の値は等しいことは明らかである。そこで、(2.10) を記述できる。(2.10) は (2.10) の両辺の値が等しいことを示している。このことは、静電場  $\mathbf{E}_A$  および静電場  $\mathbf{E}_B$  内に仮定したそれぞれの位置 a の電位の値がそれぞれ等しいことを意味する。電位が定

義されている静電場内に仮定した各質点では、静電場  $\mathbf{E}_A$  を生じている質点系 A は静電場  $\mathbf{E}_B$  を生じている質点系 B とは異なる場合も記述できる。そのように各質点系を記述している (2.10) は、質点系 A および質点系 B が等しいことを意味するものとは異なる。さらに、(2.10) は、静電場  $\mathbf{E}_A$  および静電場  $\mathbf{E}_B$  が物理現象として等しいものであることを保証するものでもない。

$\frac{U_a}{q_p} = \frac{U_a}{q} \dots$  (2.10) 静電場  $\mathbf{E}_A$  および静電場  $\mathbf{E}_B$  内に仮定したそれぞれの位置 a の電位の値は等しい。

(2.10) から (2.11) を記述できる。(2.11) の左辺は、静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置で質点  $m_{q_p}$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーである。

$$U_a = \frac{q_p}{q} \times U_a \dots (2.11)$$

(2.12) を仮定すると、(2.11) から (2.13) になる。一方、(2.14) を仮定すると、(2.5) および (2.9) から (2.14) を (2.15) に書き直すことができる。

$$U_a \neq U_a \dots (2.12)$$

$$q_p \neq q \dots (2.13)$$

$$U_a = U_a \dots (2.14)$$

$$q_p \times \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{akl}} = q \times \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{aj}} \dots (2.15)$$

(2.14) を (2.11) に使用すると (2.16) になる。(2.16) を (2.15) に仮定すると、(2.15) を (2.17) に書き直すことができる。(2.17) から (2.18) を記述できる。(2.18) の両辺は電位の重ね合わせの原理を示している。実際に、(2.2) の分子に (2.4) を代入すると (2.18) の左辺になる。同様に、(2.6) の分子に (2.8) を代入すると (2.18) の右辺になる。そして、位置 a の電位 (2.19) を記述できる。

$$q_p = q \dots (2.16)$$

$$q \times \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{akl}} = q \times \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{aj}} \dots (2.17)$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{akl}} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{aj}} \dots (2.18)$$

$$V_a = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{akl}} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{aj}} \dots (2.19) \text{電位の重ね合わせの原理}$$

電位の定義を使用すると、静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置 b の電位を (2.20) で記述できる。(2.20) の右辺の分子は位置 b に仮定した点電荷  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーになる。ただし、(2.20) の分母には点電荷  $m_q$  のもつ電気量 (2.7) を仮定する。電位差の定義 (2.1) の右辺に、静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置 a の電位 (2.2) および位置 b の電位 (2.20) を代入すると (2.21) を記述できる。

$$V_b = \frac{U_b}{q} \dots (2.20)$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{U_b}{q} - \frac{U_a}{q_p} \dots (2.21)$$

電位差 (2.21) の右辺の第二項に (2.11) を代入すると、(2.22) を記述できる。(2.22) の左辺は、静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置 a および位置 b の電位で記述した電位差である。一方、(2.22) の右辺は、静電場  $\mathbf{E}_B$  内に仮定した位置 a の電位と静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置 b の電位で記述した電位差である。(2.22) の右辺から、電位差の

定義 (2.1) は異なる静電場内に仮定したそれぞれの位置に対応する電位の差を記述できることが明らかである。

(2.22) では電位差の値が (2.22) の両辺で等しいことを示している。(2.22) を使用すると、(2.21) は (2.23) で記述できる。

$$\frac{U_b}{q} - \frac{U_a}{q_p} = \frac{U_b}{q} - \frac{\frac{q_p}{q} \times U_a}{q_p} = \frac{U_b}{q} - \frac{U_a}{q} \dots (2.22)$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{U_b}{q} - \frac{U_a}{q} \dots (2.23)$$

(2.24) の記述を使用する。(2.24) は、位置 b に仮定した質点  $m_q$  のポテンシャルエネルギーから位置 a に仮定した質点  $m_q$  のポテンシャルエネルギーを引いたものであり、質点  $m_q$  のポテンシャルエネルギーの変化量である。(2.24) では、最初に位置 a に質点  $m_q$  が在り、最後に位置 b に質点  $m_q$  が在る場合を仮定している。(2.23) で使用する際には、位置 b は静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置であり、位置 a は静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置である。ここでは、位置 a から位置 b に質点  $m_q$  が移動する過程では、静電場が変化したものとする。本書の第 2 回で各点電荷がとてゆっくり移動している場合は静電気の場合に含めることを約束した。(2.24) で、静電場  $\mathbf{E}_B$  が静電場  $\mathbf{E}_A$  に変化する場合は、静電場を生じる各点電荷がとてゆっくりと移動することを仮定する。このような各点電荷の移動では、質点系 B の質点の数が質点系 A の質点の数に一致することは保証しない。このことは、電気回路内の静電場が変化することを説明する際に応用できるものと著者は扱う。

$$\Delta U_{ab} = U_b - U_a \dots (2.24) \text{ 質点 } m_q \text{ のポテンシャルエネルギーの変化量}$$

(2.23) の右辺は (2.25) の右辺に書き直すことができる。(2.25) の右辺の分子に (2.24) の左辺を代入すると、(2.26) の右辺を記述できる。(2.26) を使用すると、(2.23) は (2.27) で記述できる。

$$\frac{U_b}{q} - \frac{U_a}{q} = \frac{U_b - U_a}{q} \dots (2.25)$$

$$\frac{U_b - U_a}{q} = \frac{\Delta U_{ab}}{q} \dots (2.26)$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q} \dots (2.27)$$

(2.27) の右辺の分子には、(2.28) の関係式が成立することは本書の第 1 回で説明をした。関係式 (2.28) の右辺は仕事量 (2.29) を記述している。仕事量 (2.29) の力は静電気力 (2.30) を使用する。仕事量 (2.29) は位置 a から位置 b へ移動した質点  $m_q$  に作用している静電気力のなす仕事量である。(2.28) で質点  $m_q$  が電気量 (2.7) をもっている場合の記述である。位置 a に仮定した質点  $m_q$  が位置 b に移動している静電場内での関係式である。

$$\Delta U_{ab} = -W_{ab} \dots (2.28) \text{ 第 1 回で定義した関係式}$$

$$W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \dots (2.29) \text{ 位置 a から位置 b へ移動した質点 } m_q \text{ に作用している静電気力のなす仕事量}$$

$$\mathbf{F} = q \times \mathbf{E} \dots (2.30)$$

静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (2.24) と仕事量 (2.29) に負号を付けた  $-W_{ab}$  のそれぞれの値が、(2.28) で定義された等しい値  $\delta_{ab} = \Delta U_{ab} = -W_{ab}$  になることを示している。一般には、真空中の質点  $m_q$  の電気量が定数であることを仮定できる。 $\delta_{ab} = -W_{ab}$  では、仕事量 (2.29) は質点  $m_q$  の始点および終点のみで決定することは、静電気力 (2.30) が保存力であることから明らかである。仕事量 (2.29) では、質点  $m_q$  に作用する静電気

力 (2.30) および質点  $m_q$  の変位ベクトル  $ds$  で決定する角度  $\theta$  を内積の余弦  $\cos\theta$  で記述する。その内積は、余弦  $\cos\theta$  を使用して静電気力 (2.30) および変位ベクトル  $ds$  での内積 (2.31) になる。質点  $m_q$  が始点から終点まで移動する過程では、静電気力 (2.30) および変位ベクトル  $ds$  は変化する場合も説明できる。内積 (2.31) には質点  $m_q$  の仮定されているそれぞれの位置に対してそれぞれの値を仮定できる。質点  $m_q$  が始点から終点まで移動する過程での質点  $m_q$  で、そのような内積 (2.31) を積分することで仕事量 (2.29) になる。一方、 $\delta_{ab} = \Delta U_{ab}$  は点電荷の質点系で生じる静電場内のその各点電荷の位置から質点  $m_q$  が仮定されている位置  $a$  で与える各線分および位置  $b$  で与える各線分の長さで決定する。この計算では、質点系内のそれぞれの2つの質点での相対的配置での静電的ポテンシャルエネルギーを使用している。静電的ポテンシャルエネルギー (2.4) および (2.8) の右辺の各項はスカラーの計算である。 $\delta_{ab} = -W_{ab}$  ではベクトルの計算をすることは既に説明をした。そのようなスカラーおよびベクトルでの計算方法からでは、一般には (2.28) の左辺での計算の手順が右辺での計算の手順よりも少なく済むものと扱える。そのように手順が少ないことで計算が簡単になることがある。このような計算の手順では、静電的ポテンシャルエネルギーの計算のみではなく電位および電位差の計算が簡単になることもある。

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |d\mathbf{s}| \cdot \cos\theta \dots (2.31)$$

(2.28) を使用して、静電的ポテンシャルエネルギーの値を定義した。その静電的ポテンシャルエネルギーは質点系内の各質点が相対的配置に在ることで、(2.2) および (2.8) のように計算できるエネルギーである。このことから、一般には (2.28) の右辺のように質点が移動することを仮定して静電的ポテンシャルエネルギーを扱う必要はない。2章では、点電荷で構成する質点系で静電場が生じていることを仮定している。その質点系の点電荷がゆっくり移動する場合、その静電場は変化するものと考えることができる。質点系を構成する点電荷の増減がある場合も、その静電場が変化することは考えることができる。そのように変化する静電場をひとつの静電場  $\mathbf{E}$  の関数として記述することができる。すでに説明したように、質点系 A から生じる静電場  $\mathbf{E}_A$  および質点系 B から生じる静電場  $\mathbf{E}_B$  を静電場  $\mathbf{E}$  に含めて考える場合もある。そして、静電気力 (2.30) で記述できるものとして扱う。ただし、ここでの点電荷の増減は問題を解決する際に与えた仮定として扱う。

### 3. 静電的ポテンシャルエネルギーの変化量と電位差の関係

静電場に定義された静電的ポテンシャルエネルギーは、その静電場内に在る電気量およびその電気量が在る静電場内の位置に対応する電位を使用して記述できることを前回で説明をした。3章では、その静電的ポテンシャルエネルギーの関係式を使用して、電位差と静電的ポテンシャルエネルギーの変化量との関係について説明をする。

静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置  $b$  で点電荷  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーを (3.1) で記述する。静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置  $a$  で点電荷  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーを (3.2) で記述する。(3.1) および (3.2) の点電荷  $m_q$  が電気量 (2.7) をもっていることを仮定している。

$${}_qU_b = q \times V_b \dots (3.1) \text{ 正の電気量 } q \text{ が在る位置 } b \text{ の点電荷 } m_q \text{ の静電的ポテンシャルエネルギー}$$

$${}_qU_a = q \times V_a \dots (3.2) \text{ 正の電気量 } q \text{ が在る位置 } a \text{ の点電荷 } m_q \text{ の静電的ポテンシャルエネルギー}$$

$$q > 0 \text{ C} \dots (2.7)$$

点電荷  $m_q$  の静電的ポテンシャルエネルギー (3.1) および静電的ポテンシャルエネルギー (3.2) の差で、点電荷  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量を (3.3) で記述する。静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (3.3) の右辺に (3.1) および (3.2) を代入すると (3.4) を記述できる。(3.4) の右辺は (3.5) の右辺のように記述できる。電位差の定義 (2.1) を使用すると、(3.5) の右辺は (3.6) の右辺のように記述できる。(3.6) を使用すると、(3.3) は (3.7) に記述できる。

$\Delta_q U_{ab} = {}_q U_b - {}_q U_a \dots (3.3)$  点電荷  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量

$${}_q U_b - {}_q U_a = q \times V_b - q \times V_a \dots (3.4)$$

$$q \times V_b - q \times V_a = q \times (V_b - V_a) \dots (3.5)$$

$${}_q U_b - {}_q U_a = q \times (V_b - V_a) = q \times \Delta V_{ab} \dots (3.6)$$

$\Delta_q U_{ab} = q \times \Delta V_{ab} \dots (3.7)$  静電的ポテンシャルエネルギーの変化量

静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置 b で点電荷  $m_{-q}$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーを (3.8) で記述する. 静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置 a で点電荷  $m_{-q}$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーを (3.9) で記述する. (3.8) および (3.9) の点電荷  $m_{-q}$  が電気量 (3.10) をもっていることを仮定している.

$$-{}_q U_b = -q \times V_b \dots (3.8) \text{負の電気量 } -q \text{ が在る位置 b の点電荷 } m_{-q} \text{ の静電的ポテンシャルエネルギー}$$

$$-{}_q U_a = -q \times V_a \dots (3.9) \text{負の電気量 } -q \text{ が在る位置 a の点電荷 } m_{-q} \text{ の静電的ポテンシャルエネルギー}$$

$$-q < 0 \text{C} \dots (3.10)$$

点電荷  $m_{-q}$  の静電的ポテンシャルエネルギー (3.8) および静電的ポテンシャルエネルギー (3.9) の差で, 点電荷  $m_{-q}$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量を (3.11) で記述する. 静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (3.11) の右辺に (3.8) および (3.9) を代入すると (3.12) の右辺のように記述できる. (3.12) の右辺は (3.13) の右辺のように記述できる. 電位差の定義 (2.1) を使用すると, (3.12) の右辺は (3.13) の右辺のように記述できる. (3.13) を使用すると, (3.11) は (3.14) に記述できる.

$$\Delta_{-q} U_{ab} = -{}_q U_b - (-{}_q U_a) \dots (3.11)$$

$$-{}_q U_b - (-{}_q U_a) = -q \times V_b - (-q \times V_a) \dots (3.12)$$

$$-{}_q U_b - (-{}_q U_a) = -q \times (V_b - V_a) = -q \times \Delta V_{ab} \dots (3.13)$$

$\Delta_{-q} U_{ab} = -q \times \Delta V_{ab} \dots (3.14)$  静電的ポテンシャルエネルギーの変化量

静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置 b および静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置 a での電位差が (3.15) である場合を仮定する. (3.15) が成立するならば (3.7) の符号は (3.16) になる. (3.16) の左辺は (3.17) の左辺のように展開できる. (3.17) の左辺は静電的ポテンシャルエネルギーの変化量である. (3.17) を (3.18) に書き直す. 一方, (3.15) から (3.19) を説明できる. (3.18) の両辺に (3.1) および (3.2) を代入すると, (3.20) を記述できる. (3.19) が成立する場合は, 正の電気量の点電荷がもつ静電的ポテンシャルエネルギーには (3.20) が成立する.

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a > 0 \dots (3.15) \text{電位差の値が正の値の場合}$$

$$q \times (V_b - V_a) > 0 \dots (3.16)$$

$$q \times V_b - q \times V_a > 0 \dots (3.17)$$

$$q \times V_b > q \times V_a \dots (3.18)$$

$V_b > V_a \dots (3.19)$  静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置 b の電位と静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置 a の電位の関係

$${}_q U_b > {}_q U_a \dots (3.20)$$

(3.15) が成立するならば (3.14) の符号は (3.21) になる. (3.21) の左辺は (3.22) の左辺のように展開できる. (3.22) の左辺は静電的ポテンシャルエネルギーの変化量である. (3.22) を (3.23) に書き直す. (3.23) の両辺に (3.8) および (3.9) を代入すると, (3.24) を記述できる. (3.19) が成立する場合は, 負の電気量の点電荷がもつ静電的ポテンシャルエネルギーには (3.24) が成立する.

$$-q \times (V_b - V_a) < 0 \dots (3.21)$$

$$-q \times V_b - (-q \times V_a) < 0 \dots (3.22)$$

$$-q \times V_b < -q \times V_a \dots (3.23)$$

$V_b > V_a \dots (3.19)$  静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置 b の電位と静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置 a の電位の関係

$$-q U_b < -q U_a \dots (3.24)$$

静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置  $b$  および静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置  $a$  での電位差が (3.25) である場合を仮定する. (3.25) が成立するならば (3.7) の符号は (3.26) になる. (3.26) の左辺は (3.27) の左辺のように展開できる. (3.27) の左辺は静電的ポテンシャルエネルギーの変化量である. (3.27) を (3.28) に書き直す. 一方, (3.25) から (3.29) を説明できる. (3.28) の両辺に (3.1) および (3.2) を代入すると, (3.30) を記述できる. (3.29) が成立する場合は, 正の電気量の点電荷がもつ静電的ポテンシャルエネルギーには (3.30) が成立する.

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a < 0 \dots (3.25) \text{電位差の値が負の値の場合}$$

$$q \times (V_b - V_a) < 0 \dots (3.26)$$

$$q \times V_b - q \times V_a < 0 \dots (3.27)$$

$$q \times V_b < q \times V_a \dots (3.28)$$

$$V_b < V_a \dots (3.29) \text{静電場 } \mathbf{E}_A \text{ 内の位置 } b \text{ の電位と静電場 } \mathbf{E}_B \text{ 内の位置 } a \text{ の電位の関係}$$

$${}_q U_b < {}_q U_a \dots (3.30)$$

(3.25) が成立するならば (3.14) の符号は (3.31) になる. (3.31) の左辺は (3.32) の左辺のように展開できる. (3.32) の左辺は静電的ポテンシャルエネルギーの変化量である. (3.32) を (3.33) に書き直す. (3.33) の両辺に (3.8) および (3.9) を代入すると, (3.34) を記述できる. (3.29) が成立する場合は, 負の電気量の点電荷がもつ静電的ポテンシャルエネルギーには (3.34) が成立する.

$$-q \times (V_b - V_a) > 0 \dots (3.31)$$

$$-q \times V_b - (-q \times V_a) > 0 \dots (3.32)$$

$$-q \times V_b > -q \times V_a \dots (3.33)$$

$$V_b < V_a \dots (3.29) \text{静電場 } \mathbf{E}_A \text{ 内の位置 } b \text{ の電位と静電場 } \mathbf{E}_B \text{ 内の位置 } a \text{ の電位の関係}$$

$$-{}_q U_b > -{}_q U_a \dots (3.34)$$

静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置  $b$  および静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置  $a$  での電位差が (3.35) である場合を仮定する. (3.35) が成立するならば (3.7) は (3.36) になる. (3.36) の左辺は (3.37) の左辺のように展開できる. (3.37) は静電的ポテンシャルエネルギーの変化量である. (3.37) を (3.38) に書き直す. 一方, (3.35) から (3.39) を説明できる. (3.38) の両辺に (3.1) および (3.2) を代入すると, (3.40) を記述できる. (3.39) が成立する場合は, 正の電気量の点電荷がもつ静電的ポテンシャルエネルギーには (3.40) が成立する.

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = 0 \dots (3.35) \text{電位差の値が零の場合}$$

$$q \times (V_b - V_a) = 0 \dots (3.36)$$

$$q \times V_b - q \times V_a = 0 \dots (3.37)$$

$$q \times V_b = q \times V_a \dots (3.38)$$

$$V_b = V_a \dots (3.39) \text{静電場 } \mathbf{E}_A \text{ 内の位置 } b \text{ の電位と静電場 } \mathbf{E}_B \text{ 内の位置 } a \text{ の電位の関係}$$

$${}_q U_b = {}_q U_a \dots (3.40)$$

(3.35) が成立するならば (3.14) は (3.41) になる. (3.41) の左辺は (3.42) の左辺のように展開できる. (3.42) は静電的ポテンシャルエネルギーの変化量である. (3.42) を (3.43) に書き直す. (3.43) の両辺に (3.8) および (3.9) を代入すると, (3.44) を記述できる. (3.39) が成立する場合は, 負の電気量の点電荷がもつ静電的ポテンシャルエネルギーには (3.44) が成立する.

$$-q \times (V_b - V_a) = 0 \dots (3.41)$$

$$-q \times V_b - (-q \times V_a) = 0 \dots (3.42)$$

$$-q \times V_b = -q \times V_a \dots (3.43)$$

$V_b = V_a \dots (3.39)$  静電場  $\mathbf{E}_A$  内の位置  $b$  の電位と静電場  $\mathbf{E}_B$  内の位置  $a$  の電位の関係

$$-q U_b = -q U_a \dots (3.44)$$

次に、回路内の電圧を説明する際に応用できるものと著者が考える質点系での重ね合わせの原理を使用して考察する。3章の上述で説明したことを前提に、電位差から電位および静電的ポテンシャルエネルギーについての関係を説明する。

2章で質点系 A の各点電荷から生じた静電場  $\mathbf{E}_A$  を使用している。その静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置  $a$  に在る点電荷  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーを (2.4) で記述した。

$$U_{ak} = q_p \times \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{akl}}, (k \geq 2) \dots (2.4)$$

質点系 B の各点電荷から生じた静電場  $\mathbf{E}_B$  を使用している。その静電場  $\mathbf{E}_B$  内に仮定した位置  $a$  に在る点電荷  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーを (2.8) で記述した。

$$U_{ai} = q \times \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{aij}}, (i \geq 2) \dots (2.8)$$

(2.8) を使用すると、静電場  $\mathbf{E}_B$  内に仮定した位置  $a$  の電位を (3.45) で記述できる。(3.45) は電位の重ね合わせの原理である。

$$V_{ai} = \frac{U_{ai}}{q} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{aij}}, (i \geq 2) \dots (3.45) \text{ 電位の重ね合わせの原理}$$

静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置  $b$  に在る点電荷  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーを (3.46) で記述できることを仮定する。(3.46) を使用すると、その静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置  $b$  の電位を (3.47) で記述できる。

$$U_{bk} = q_p \times \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{bkl}}, (k \geq 2) \dots (3.46)$$

$$V_{bk} = \frac{U_{bk}}{q_p} = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{bkl}}, (k \geq 2) \dots (3.47) \text{ 電位の重ね合わせの原理}$$

静電場  $\mathbf{E}_A$  内に仮定した位置  $b$  の電位と静電場  $\mathbf{E}_B$  内に仮定した位置  $a$  の電位で記述する電位差を (3.48) で記述する。(3.48) の右辺の第一項に (3.47) を代入して、(3.48) の右辺の第二項に (3.45) を代入すると電位差 (3.49) を記述できる。

$$\Delta V_{aibk} = V_{bk} - V_{ai} \dots (3.48)$$

$$\Delta V_{aibk} = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{bkl}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{aij}} \dots (3.49)$$

電位差 (3.48) の符号が (3.50) の場合を仮定する。(3.50) を使用すると、(3.48) から (3.51) を記述できる。

(3.51) は (3.52) に記述することができる。

$$\Delta V_{aibk} > 0 \dots (3.50)$$

$$V_{bk} > V_{ai} \dots (3.51)$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{bkl}} > \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{aij}} \dots (3.52)$$

(3.52) に (3.53) および (3.54) を仮定すると (3.20) が成立することは明らかである。(3.52) の両辺の電位をそれぞれ定義している静電場  $\mathbf{E}_A$  と静電場  $\mathbf{E}_B$  内での点電荷  $m_q$  のもつ各静電的ポテンシャルエネルギーの関係が (3.20) を満足する。

$$V_b = V_{bk} \dots (3.53)$$

$$V_a = V_{ai} \dots (3.54)$$

$${}_q U_b > {}_q U_a \dots (3.20)$$

電位差 (3.48) の符号が (3.55) の場合を仮定する. (3.55) を使用すると, (3.48) から (3.56) を記述できる.

(3.56) は (3.57) に記述することができる.

$$\Delta V_{aibk} < 0 \dots (3.55)$$

$$V_{bk} < V_{ai} \dots (3.56)$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{bkl}} < \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{ajj}} \dots (3.57)$$

(3.57) に (3.53) および (3.54) を仮定すると (3.30) が成立することは明らかである. (3.57) の両辺の電位をそれぞれ定義している静電場  $\mathbf{E}_A$  と静電場  $\mathbf{E}_B$  内での点電荷  $m_q$  のもつ各静電的ポテンシャルエネルギーの関係が (3.30) を満足する.

$${}_q U_b < {}_q U_a \dots (3.30)$$

電位差 (3.48) が (3.58) の場合を仮定する. (3.58) を使用すると, (3.48) から (3.59) を記述できる. (3.59)

は (3.60) に記述することができる.

$$\Delta V_{aibk} = 0 \dots (3.58)$$

$$V_{bk} = V_{ai} \dots (3.59)$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_l}{r_{bkl}} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{ajj}} \dots (3.60)$$

(3.60) に (3.53) および (3.54) を仮定すると (3.40) が成立することは明らかである. (3.60) の両辺の電位をそれぞれ定義している静電場  $\mathbf{E}_A$  と静電場  $\mathbf{E}_B$  内での点電荷  $m_q$  のもつ各静電的ポテンシャルエネルギーの関係が (3.40) を満足する.

$${}_q U_b = {}_q U_a \dots (3.40)$$

質点系を使用した上述までの考察を使用して電位差および静電的ポテンシャルエネルギーについての簡単な場合を説明する. その内容は, 4章および5章に関係をもつ.

(3.53), (3.54) および (3.61) を仮定する. ひとつの点電荷 (3.62) から生じた静電場内の位置 a および位置 b の, それぞれの電位で記述する電位差の式は (3.63) である. ただし, 電気量 (3.62) の符号は自由である. 電位差 (3.63) の右辺の第一項および第二項は前回の式 (2.6) を使用している. 距離の関係 (3.64) が成立するならば電位差 (3.63) は (3.65) になる. 電位差 (3.65) は (3.66) に書き直すことができる. 距離の関係 (3.64) は点電荷 (3.62) を中心とする球面上で成立する. この球面上の任意の 2 点間の電位差は (3.65) のように零である. (3.66) で, この球面上の各点の電位は等しいことが分かる. (3.64) の場合は (4.42) が成立する. 付録 i では誘電率が負の場合について簡単な説明をしている.

$$i = k = 2 \dots (3.61)$$

$$q_1 = q_j = q_l \text{ C} \dots (3.62)$$

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1}{r_b} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1}{r_a}, (r_a = r_{a21}, r_b = r_{b21}) \dots (3.63)$$

$$r_b = r_a \dots (3.64)$$

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = 0 \dots (3.65)$$

$$V_b = V_a \dots (3.66)$$

電気量 (2.7) および電位差 (3.63) を使用すると, 点電荷  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化

量を (3.67) で記述できる. (3.62) の点電荷から生じる静電場内の電位差と電気量 (2.7) との積である (3.7) の右辺に電位差 (3.63) を代入すると (3.67) になる. (3.67) の右辺の第一項および第二項は静電的ポテンシャルエネルギーの式である.

$$q > 0 \text{ C} \dots (2.7)$$

$$\Delta_q U_{ab} = q \times (V_b - V_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q \cdot q_1}{r_b} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q \cdot q_1}{r_a} \dots (3.67)$$

$$\Delta_q U_{ab} = q \times \Delta V_{ab} \dots (3.7)$$

#### 4. 静電場を使用した電位差の計算

静電的ポテンシャルエネルギーを使用することで電位差を計算することができる. 点電荷のもつ静電的ポテンシャルエネルギーを直接に測定できなくても関係式 (2.28) を応用することで静電的ポテンシャルエネルギーの値を知ることができる.

$$\Delta U_{ab} = -W_{ab} \dots (2.28) \text{ 第1回で定義した関係式}$$

静電場内に点電荷  $m_q$  を仮定する. 点電荷  $m_q$  は電気量 (2.7) を持つものとする. その点電荷  $m_q$  には静電気力 (2.30) が作用する.

$$q > 0 \text{ C} \dots (2.7)$$

$$\mathbf{F} = q \times \mathbf{E} \dots (2.30)$$

静電気力 (2.30) が作用している点電荷  $m_q$  が静電場内に仮定された位置 a から位置 b に移動する場合を仮定する. この場合で, 点電荷  $m_q$  に作用する静電気力 (2.30) のなす仕事量を (2.29) で記述できる.

$$W_{ab} = \int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (2.29) \text{ 位置 a から位置 b へ移動した質点 } m_q \text{ に作用している静電気力のなす仕事量}$$

仕事量 (2.29) を (2.28) の右辺に代入すると, 静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (4.1) を記述できる.

(4.1) を電位差 (2.27) の右辺の分子に代入すると, (4.2) を記述できる. (4.2) の左辺と右辺を使用すると, 電位差 (4.3) を記述できる. 電位差 (4.3) の右辺の負号は (2.28) の右辺の負号が残ったものである. 電位差 (4.3) は電位差の定義 (2.1) とは明らかに異なる. 本書では, 電位差 (4.3) は静電場内での点電荷の移動情報の使用で電位差を知ることができる技術 として扱う. このように静電場内で点電荷が移動することを使用した技術とする解釈は, 前回の電位の説明でも与えた.

$$\Delta U_{ab} = - \int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (4.1)$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q} \dots (2.27)$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.2)$$

$$\Delta V_{ab} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.3) \text{ 静電場内で点電荷が移動することを使用した技術}$$

電位差の定義 (2.1) を使用すると, 位置 b の電位 (4.4) を記述できる. 位置 b の電位 (4.4) の右辺の第一項に電位差 (4.3) を代入すると, 位置 b の電位 (4.5) を記述できる. (4.5) では, 位置 a の電位と電位差 (4.3) で位置 b の電位を知ることができる. (4.5) の解釈では, 位置 a の電位と静電場内で点電荷の移動情報を使用した技術として扱う.

$$\Delta V_{ab} \equiv V_b - V_a \dots (2.1)$$

$$V_b = \Delta V_{ab} + V_a \cdots (4.4)$$

$$V_b = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + V_a \cdots (4.5)$$

電位差 (2.27) の右辺には点電荷  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量が記述されている。単位正電荷あたりの——点電荷  $m_q$  の持つ——静電的ポテンシャルエネルギーの変化量を電位差とした解釈を (2.27) は与える。静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (4.1) を応用して静電的ポテンシャルエネルギーを知ることができる。(4.1) を使用した記述についての静電的ポテンシャルエネルギーの考察を次にする。そして、その考察での考えを導入して、電位差 (4.3) についての考察をする。

静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (2.24) を (2.28) の左辺に代入すると、関係式 (4.6) を記述できる。静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (4.6) から位置 b に仮定した点電荷のもつ静電的ポテンシャルエネルギー (4.7) を記述できる。仕事量 (2.29) を位置 b の静電的ポテンシャルエネルギー (4.7) の右辺の第一項に代入すると (4.8) を記述できる。(4.8) では、位置 a の静電的ポテンシャルエネルギーに位置 a から位置 b へ移動した点電荷  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量を加えた値は、位置 b の静電的ポテンシャルエネルギーの値に等しいことを意味する。

$$\Delta U_{ab} = U_b - U_a \cdots (2.24)$$

$$U_b - U_a = -W_{ab} \cdots (4.6)$$

$$U_b = -W_{ab} + U_a \cdots (4.7)$$

$$U_b = -\int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} + U_a \cdots (4.8)$$

点電荷  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量は (2.24) の右辺に位置 a および位置 b の静電的ポテンシャルエネルギーの値を代入することで知ることができる。位置 a に在る点電荷  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーは (4.9) で記述できる。位置 b に在る点電荷  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーは (4.10) で記述できる。(4.9) および (4.10) を (2.24) の右辺に代入すると、点電荷  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (4.11) を記述できる。

$$U_a = -\int_{\infty}^a (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \cdots (4.9) \text{ 無限遠から位置 a に移動した質点 } m_q \text{ の位置 a のポテンシャルエネルギー}$$

$$U_b = -\int_{\infty}^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \cdots (4.10) \text{ 無限遠から位置 b に移動した質点 } m_q \text{ の位置 b のポテンシャルエネルギー}$$

$$\Delta U_{ab} = -\int_{\infty}^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} - \left\{ -\int_{\infty}^a (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \right\} \cdots (4.11) \text{ 質点 } m_q \text{ のもつポテンシャルエネルギーの変化量}$$

静電場内の位置 a および位置 b の両方の位置にひとつの同じ点電荷  $m_q$  が同時に存在しない場合では、(4.11) の右辺の第一項および第二項はひとつの同じ点電荷  $m_q$  を使用して同時には測定できない。このことでは、(4.11) の記述は物理現象としては成立しないものと解釈できる。(4.11) は無限遠から位置 b へ移動した質点  $m_q$  がもつ位置 b の静電的ポテンシャルエネルギーから無限遠から位置 a へ移動した質点  $m_q$  がもつ位置 a の静電的ポテンシャルエネルギーを引いたものである。位置 a および位置 b に在る時の質点  $m_q$  がもつそれぞれの静電的ポテンシャルエネルギーをそれぞれ異なる時点で測定した場合は、(4.11) で静電的ポテンシャルエネルギーの変化量を測定できる物理現象を説明している。ただし、(4.11) の右辺の第二項では最初に位置 a に在る質点  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーの値を (4.9) の技術で知ることを意味する。(4.11) の右辺の第一項では最後に位置 b に在る質点  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーの値を (4.10) の技術で知ることを意味す

る。

(4.9) および (4.10) の質点  $m_q$  の始点は無限遠である。一般には (4.9) および (4.10) の終点は静電場内の異なる位置である。このことから、(4.11) の右辺の第一項および第二項の物理現象での質点  $m_q$  の移動経路は異なるものを意味する。そして、一般の経路では、(4.11) の右辺の第一項および第二項のそれぞれの移動経路は始点から終点へとひとつの繋がった移動経路にはならないことを意味する。(4.11) の右辺を (4.12) に書き換えることで、(4.12) の右辺で説明している物理現象は (4.11) の右辺で説明をしている物理現象とは異なる。(4.12) の右辺の第二項では、位置 a を始点とした質点  $m_q$  が無限遠を終点とする経路で移動する。その後に、(4.12) の右辺の第一項では無限遠を始点として移動して位置 b を終点とする経路で質点  $m_q$  が移動することを意味する。この移動経路は、始点を位置 a として終点を位置 b とする経路である。このような質点  $m_q$  の移動は (4.1) の右辺で説明しているものと一致する。(4.12) の右辺の広義積分は (4.13) の右辺の積分に書き換えることができる。(4.13) の右辺は (4.1) の右辺に等しいことは明らかである。(4.12) および (4.13) では質点  $m_q$  が位置 a から位置 b へ移動することから生じる時間を与えることができる。この時間のために、(4.12) および (4.13) では位置 a および位置 b に在る時の質点  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーを同時に測定できないことは明らかである。

$$\Delta U_{ab} = -\int_{\infty}^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} - \int_a^{\infty} (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (4.12)$$

$$\Delta U_{ab} = -\int_{\infty}^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} - \int_a^{\infty} (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = -\int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (4.13)$$

上述の (4.11) ~ (4.13) の記述で説明する物理現象では、位置 a および位置 b に在る時の質点  $m_q$  のもつ静電的ポテンシャルエネルギーを同時に測定はできないことを説明した。(4.14) の  ${}_{m_1}U_b$  は位置 b に在る質点  $m_1$  のもつポテンシャルエネルギーを意味する。(4.14) の  ${}_{m_2}U_a$  は位置 a に在る質点  $m_2$  のもつポテンシャルエネルギーを意味する。質点  $m_1$  および質点  $m_2$  の電気量を等しく (2.7) にできるならば、(4.14) で位置 b および位置 a で電気量 (2.7) の各点電荷が持つ静電的ポテンシャルエネルギーの差を理論上は同時に測定できる。

$${}_{m_1}U_b - {}_{m_2}U_a \dots (4.14)$$

上述の質点  $m_q$  の移動についての電位差の考察をする。位置 a の電位 (4.15) および位置 b の電位 (4.16) は前回で導出した静電場から計算した電位の式である。電位差 (2.23) の右辺に (4.15) および (4.16) を代入すると、電位差 (4.17) を記述できる。

$$V_a = -\int_{\infty}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.15) \text{無限遠から位置 a へ移動した質点の終点である位置 a の電位}$$

$$V_b = -\int_{\infty}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.16) \text{無限遠から位置 b へ移動した質点の終点である位置 b の電位}$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{U_b}{q} - \frac{U_a}{q} \dots (2.23)$$

$$\Delta V_{ab} = -\int_{\infty}^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \left\{ -\int_{\infty}^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right\} \dots (4.17)$$

電位差 (4.17) は、(2.25) を使用するとひとつの点電荷  $m_q$  がもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (4.11) で与えることができる記述である。(4.15) は無限遠を始点とした質点が移動して位置 a を終点にする移動経路での広義積分である。(4.16) は無限遠を始点とした質点が移動して位置 b を終点にする移動経路での広義積分である。(4.17) では、無限遠を始点として質点  $m_q$  が移動する必要があることから、その質点  $m_q$  が終点に着くまでの

時間を考えることができる。ここで、(4.15) および (4.16) の終点は異なるものとする。そして、静電場内の位置 a および位置 b の両方の位置にひとつの同じ点電荷  $m_q$  が同時に存在しない場合では、(4.17) の右辺の第一項および第二項はひとつの同じ点電荷  $m_q$  を使用して同時に測定できない。このことでは、(4.17) の記述は物理現象としては成立しないものと解釈できる。質点  $m_q$  が在る位置 a および位置 b のそれぞれの電位をそれぞれ異なる時点で質点  $m_q$  の移動の情報を使用して測定した場合は、(4.17) で電位差を測定できる物理現象を説明している。

$$\frac{U_b}{q} - \frac{U_a}{q} = \frac{U_b - U_a}{q} \dots (2.25)$$

一方、静電場内のそれぞれの位置に対応する電位を考えることができる。電位差 (2.1) は静電場内の 2 つの位置に対応させたそれぞれの電位の差である。このために、電位差の定義 (2.1) に位置 a の電位 (4.15) および位置 b の電位 (4.16) を代入しても、電位差 (4.17) を記述できる。位置 a の電位 (4.15) および位置 b の電位 (4.16) にそれぞれ別の質点を仮定して、それらの各質点がそれぞれ始点から終点に移動した場合を仮定しても (4.17) で電位差を知ることができる。その場合では、それぞれの質点の移動時間を考えることができる。一般に、この時間が生じることで位置 a の電位 (4.15) および位置 b の電位 (4.16) のそれぞれの終点に異なる 2 つの質点が同時に到着することは理論上計算できる。もし、その異なる 2 つの質点が同時に終点に到着するならば、(4.17) の右辺の 2 つの項の電位を同時に測定することができる。

(4.17) の右辺は (4.18) の右辺のように書き換えることができる。(4.11) からの (4.18) の右辺では、始点の位置 a から質点  $m_q$  が移動して終点である無限遠に着いた後に、無限遠を始点として移動して位置 b を終点とする移動を説明している。このような移動は始点の位置 a から終点の位置 b まで質点  $m_q$  が移動することに等しいものとして、(4.19) を記述できる。電位差 (4.19) の右辺は電位差 (4.3) の右辺に等しいことは明らかである。(4.19) は、ひとつの同じ質点  $m_q$  の移動情報の利用で電位差を測定する技術であるものと解釈できる。ひとつの同じ質点  $m_q$  が始点 a から終点 b までの移動に必要な時間を考えることができる。その時間のために、電位差 (4.19) では位置 a および位置 b のそれぞれの電位を同時に測定することはできない。一方、電位差の定義 (2.1) に位置 a の電位 (4.15) および位置 b の電位 (4.16) を代入して記述した (4.18) で 2 つの質点を使用して電位差を記述している場合は、(4.18) の右辺の第一項の質点を、(4.18) の右辺の第二項の質点とは異なるものとして扱う。それらの 2 つの質点が同時に到着することを理論上計算できる。このことでは (4.17) の場合と同様に (4.18) の右辺の第一項および第二項の電位を同時に測定することができる。

$$\Delta V_{ab} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.18)$$

$$\Delta V_{ab} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.19)$$

電位差の定義 (2.1) に位置 a の電位 (4.15) および位置 b の電位 (4.16) を代入して記述した (4.17) および (4.18) の技術では、位置 a および位置 b のそれぞれの電位を同時に測定できる可能性について説明できた。一方、(4.19) を使用して (4.3) では位置 a および位置 b のそれぞれの電位を同時に測定できないことを説明できた。この同時性についてのそれぞれの技術の違いは、それぞれの技術の特徴となる。

(4.20) では位置 a および位置 b が同じ位置であることを意味する。(4.20) を仮定すると、(4.21) になることは明らかである。(4.21) は始点の位置 a から質点が終点の位置 a に戻る移動を説明できる。(4.21) を使用すると、(4.1) から (4.22) になる。(4.22) が成立するならば (4.23) および (4.24) になることは既に説明をした。(4.23) を使用すると、電位の定義 (2.1) から (4.24) になることは明らかである。仕事量 (4.21) の静

電場を使用した積分が成立するのは静電気力が保存力のためである。動場の電場内での電気力のなす仕事における閉曲線に沿う線積分は零になるものとは限らない。

$$a = b \dots (4.20)$$

$$W_{aa} = \int_a^a (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \dots (4.21)$$

$$\Delta U_{ab} = - \int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = 0 \dots (4.22)$$

$$\Delta V_{ab} = 0 \dots (4.23)$$

$$V_a = V_b \dots (4.24)$$

4章のここまででは、各式で物理現象を説明してきた。次に、仕事量の式で、物理現象ではなく値が等しいことから記述できる関係を説明する。

質点  $m_q$  の静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (2.28) から (4.1) を導出できた。質点  $m_q$  の静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (4.1) の右辺の仕事量は (2.29) で与えた。

$$\Delta U_{ab} = -W_{ab} \dots (2.28)$$

$$\Delta U_{ab} = - \int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (4.1)$$

$$W_{ab} = \int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (2.29) \text{ 位置 } a \text{ から位置 } b \text{ へ移動した質点 } m_q \text{ に作用している静電気力のなす仕事量}$$

(4.1) の右辺の値は (4.25) の右辺のように積分の値に等しい。(4.25) の右辺を仕事量として (4.26) で記述する。仕事量 (4.26) は、位置  $b$  から位置  $a$  まで移動する質点  $m_q$  ——  $m_q$  は電気量 (2.7) をもつ。—— に作用する静電気力 (2.30) のなす仕事量である。(2.29), (4.25) および (4.26) を使用すると, (4.27) を記述できる。質点  $m_q$  の静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (4.27) を使用すると, 電位差 (2.1) は (4.28) で記述できる。

$$\Delta U_{ab} = - \int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \int_b^a (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (4.25)$$

$$W_{ba} = \int_b^a (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (4.26) \text{ 位置 } b \text{ から位置 } a \text{ へ移動した質点 } m_q \text{ に作用している静電気力のなす仕事量}$$

$$q > 0 \text{ C} \dots (2.7)$$

$$\mathbf{F} = q \times \mathbf{E} \dots (2.30)$$

$$\Delta U_{ab} = -W_{ab} = W_{ba} \dots (4.27)$$

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = \frac{\Delta U_{ab}}{q} = \frac{-W_{ab}}{q} = \frac{W_{ba}}{q} = \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.28)$$

電位差 (4.28) を電位差 (4.29) と比較する。そのために, (4.29) を静電場ベクトル  $\mathbf{E}$  で記述する。

$$\Delta V_{ba} = V_a - V_b \dots (4.29)$$

(4.29) は (4.30) で記述できる。質点  $m_q$  が最初に位置  $b$  に在ることを仮定する。その質点  $m_q$  が最後に位置  $a$  に在ることを仮定する。その質点  $m_q$  の静電的ポテンシャルエネルギーの変化量は (4.31) で記述できる。

$$V_a - V_b = \frac{U_a}{q} - \frac{U_b}{q} \dots (4.30)$$

$$\Delta U_{ba} = -W_{ba} \dots (4.31)$$

仕事量 (4.26) を使用すると、電位差 (4.30) の右辺は (4.32) で記述できる。電位差 (4.30) および (4.32) を使用すると、電位差 (4.29) は (4.33) で記述できる。電位差 (4.32) の右辺の積分は仕事量 (4.26) のものである。電位差 (4.32) の右辺の負号は (4.31) の右辺の負号が残ったものである。

$$\frac{U_a}{q} - \frac{U_b}{q} = \frac{\Delta U_{ba}}{q} = \frac{-W_{ba}}{q} = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.32)$$

$$\Delta V_{ba} = V_a - V_b = -\int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.33)$$

電位差 (4.28) および電位差 (4.33) を使用すると、(4.34) を記述できる。(4.33) の積分は始点を位置 b とする質点  $m_q$  が終点を位置 a として移動することを意味している。始点を位置 a とする質点  $m_q$  の終点が位置 b となる移動を意味する (4.3) の積分では (4.33) の始点と終点とは逆になっている。物理現象として、そのような移動を説明する (4.3) の右辺での積分の値は (4.28) の右辺での積分の値に等しい。(4.28) の右辺の積分では (4.3) の右辺の物理現象を説明できていない。(4.34) では (4.28) および (4.33) の値の関係を示している。(4.28) の左辺の値は (4.33) の左辺の値とは異符号の関係である。

$$\Delta V_{ba} = -\Delta V_{ab} \dots (4.34)$$

$$\Delta V_{ab} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.3) \text{ 静電場内で点電荷が移動することを使用した技術}$$

電位差と仕事量との関係を知ることができた。次に、その関係を応用して点電荷の移動方向と電位差との関係を説明する。ここで説明する電位差と正の点電荷の移動方向の関係は回路内を点電荷が移動することを理解する際に使用できる。さらに、正の点電荷の移動方向と静電気力の向きとの関係は、動場である電場の電気力で移動する点電荷から生じる静電場を考察する際に使用できる。動場である電場については第5回の本文で回路要素に結び付けて触れる。

静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (2.24) を左辺とする (2.28) の関係式を使用する。(2.28) の右辺での保存力のなす仕事量は (2.29) である。仕事量 (2.29) の右辺は静電場内の正の点電荷  $m_q$  が位置 a から位置 b まで移動したものと仮定した場合のその静電気力 (2.30) のなす仕事量である。

$$\Delta U_{ab} = U_b - U_a \dots (2.24)$$

$$\Delta U_{ab} = -W_{ab} \dots (2.28) \text{ 第1回で定義した関係式}$$

$$W_{ab} = \int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (2.29) \text{ 位置 a から位置 b へ移動した質点 } m_q \text{ に作用している静電気力のなす仕事量}$$

$$\mathbf{F} = q \times \mathbf{E} \dots (2.30)$$

仕事量 (2.29) の右辺の内積は静電気力 (2.30) を使用すると内積 (4.35) になる。内積 (4.35) の右辺は (4.36) の右辺で記述できる。内積 (4.36) の右辺の記号には (4.37) および (4.38) が成立する。内積 (4.36) の右辺の余弦 (4.39) は、電気量 (2.7) の点電荷  $m_q$  の移動方向と静電気力  $\mathbf{F}$  の向きとの角度で決定する。(4.36) の右辺の符号を決定するのは余弦 (4.39) であることは明らかである。

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = q \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.35)$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q \times E \times ds \times \cos \theta \dots (4.36)$$

$$E = |\mathbf{E}| > 0 \dots (4.37)$$

$$ds = |d\mathbf{s}| > 0 \dots (4.38)$$

$$\cos \theta \dots (4.39)$$

$$q > 0 \text{ C} \dots (2.7)$$

内積 (4.36) の余弦 (4.39) の符号については、次のように決定する。内積 (4.36) は (4.40) ~ (4.42) で区別すると、静電気力 (2.30) と電気量 (2.7) の点電荷  $m_q$  の移動方向との角度を説明できる。内積 (4.40) では余弦 (4.39) が正になる。静電気力 (2.30) の向きと点電荷  $m_q$  の移動方向との角度は余弦 (4.39) が正になる角度である。この場合、本書では静電気力 (2.30) の向きと点電荷  $m_q$  の移動方向は‘同じ向き’であるということがある。内積 (4.41) では余弦 (4.39) が負になる。静電気力 (2.30) の向きと点電荷  $m_q$  の移動方向との角度は余弦 (4.39) が負になる角度である。この場合、本書では静電気力 (2.30) の向きと点電荷  $m_q$  の移動方向は‘逆の向き’であるということがある。内積 (4.42) では余弦 (4.39) が零になる。内積 (4.42) では静電気力の向きと点電荷の移動方向は直交している。

$$q \times E \times ds \times \cos\theta > 0 \dots (4.40)$$

$$q \times E \times ds \times \cos\theta < 0 \dots (4.41)$$

$$q \times E \times ds \times \cos\theta = 0 \dots (4.42)$$

電位差 (4.43) を使用して電位差と点電荷の移動方向についての関係を説明できる。電位差 (4.43) では仕事量 (2.29)、正の電気量 (2.7) および負の符号を使用して電位差を記述できる。電位差 (4.43) の右辺の負の符号は関係 (2.28) の右辺の負の符号を記述している。

$$\Delta V_{ab} = \frac{-W_{ab}}{q} \dots (4.43)$$

電位差に (4.44) が成立するものと仮定すると、電位差 (4.43) の使用で電位差 (4.45) を記述できる。電位差 (4.45) では静電的ポテンシャルエネルギーの変化量に (4.46) が成立する。一方、電位差 (4.45) の右辺では静電場内の静電気力のなす仕事量に (4.47) が成立する。電位差 (4.44) を使用すると (4.48) の関係を得る。(4.47) では、静電場内の位置 a から位置 b へ移動する過程で静電気力 (2.30) の向きとは逆向きに正の点電荷が移動する (4.41) の符号を示した仕事量の式である。仕事量 (4.47) が成立するならば、関係 (4.48) では正の点電荷が位置 a の電位よりも高い電位が対応する位置 b へ移動したことになる。

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a > 0 \dots (4.44)$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q} = \frac{-W_{ab}}{q} > 0 \dots (4.45)$$

$$\Delta U_{ab} > 0 \dots (4.46)$$

$$W_{ab} < 0 \dots (4.47)$$

$$V_b > V_a \dots (4.48)$$

電位差に (4.49) が成立するものと仮定すると、電位差 (4.43) の使用で電位差 (4.50) を記述できる。電位差 (4.50) では静電的ポテンシャルエネルギーの変化量に (4.51) が成立する。一方、電位差 (4.50) の右辺では静電場内の静電気力のなす仕事量に (4.52) が成立する。電位差 (4.49) を使用すると (4.53) の関係を得る。(4.52) では、静電場内の位置 a から位置 b へ移動する過程で静電気力 (2.30) の向きとは同じ向きに正の点電荷が移動する (4.40) の符号を示した仕事量の式である。仕事量 (4.52) が成立するならば、関係 (4.53) では正の点電荷が位置 a の電位よりも低い電位が対応する位置 b へ移動したことになる。

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a < 0 \dots (4.49)$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q} = \frac{-W_{ab}}{q} < 0 \dots (4.50)$$

$$\Delta U_{ab} < 0 \dots (4.51)$$

$$W_{ab} > 0 \dots (4.52)$$

$$V_b < V_a \dots (4.53)$$

電位差に (4.54) が成立するものと仮定すると、電位差 (4.43) の使用で電位差 (4.55) を記述できる。電位差 (4.55) では静電的ポテンシャルエネルギーの変化量に (4.56) が成立する。一方、電位差 (4.55) の右辺では静電場内の静電気力のなす仕事量に (4.57) が成立する。(4.54) が常に成立する場合は (4.55) ~ (4.58) が成立することは明らかである。電位差 (4.54) を使用すると (4.58) の関係を得る。

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = 0 \dots (4.54)$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q} = \frac{-W_{ab}}{q} = 0 \dots (4.55)$$

$$\Delta U_{ab} = 0 \dots (4.56)$$

$$W_{ab} = 0 \dots (4.57)$$

$$V_a = V_b \dots (4.58)$$

静電場内の位置 a から位置 b へ移動する過程で静電気力 (2.30) の向きとは直交する向きに正の点電荷が移動する (4.42) の値を示した仕事量の式として (4.57) を解釈できる。他方の解釈では、静電場内の位置 a から位置 a へ移動する過程あるいは位置 a に静止する過程で正の点電荷に作用する静電気力 (2.30) のなす仕事量の式として (4.57) を扱える。仕事量 (4.57) が成立するならば、関係 (4.58) では正の点電荷が位置 a の電位と等しい電位が対応する位置 b へ移動したことになる。

電位差 (4.3) で静電場が一様な場合の電位差を計算する。電位差 (4.3) で (4.59) のように計算できるものとする。ただし、内積 (4.60) が成立する。内積 (4.60) には (4.37) および (4.38) を仮定する。(4.59) の静電場は定数として扱った。

$$\Delta V_{ab} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.3) \text{ 静電場内で点電荷が移動することを使用した技術}$$

$$\Delta V_{ab} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_a^b E \times ds \times \cos\theta = -E \times \cos\theta \int_a^b ds = -E \times \cos\theta \times (b-a) \dots (4.59)$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \times ds \times \cos\theta \dots (4.60)$$

$$E = |\mathbf{E}| > 0 \dots (4.37)$$

$$ds = |d\mathbf{s}| > 0 \dots (4.38)$$

電位差 (4.59) を (4.61) に記述する。ただし、(4.62) を仮定する。電位差 (4.61) の右辺から分かるように (4.62) のみで電位差が決定する。また、余弦 (4.63) を仮定して電位差 (4.61) を (4.64) に記述する。余弦 (4.63) が成立する場合には電位差 (4.59) の積分区間のみで電位差 (4.64) は決定する。

$$\Delta V_{ab} = -E \times \cos\theta \times (b-a) = E \times \cos\theta \times (a-b) = E \times L \dots (4.61)$$

$$L = (a-b) \times \cos\theta \dots (4.62)$$

$$\cos\theta = 1 \dots (4.63)$$

$$\Delta V_{ab} = E \times L = E \times (a-b) \dots (4.64)$$

(4.62) に (4.65) を仮定すると、電位差 (4.61) は (4.66) を満足する。電位差 (4.66) では、(4.62) で電位差の符号が決定する。(4.62) では (4.59) の積分区間の両端および余弦で符号が決定する。(4.67) および (4.68) では、(4.59) の積分区間の両端になる a および b の座標軸上の位置は逆の関係である。このことでは、(4.65) の符号および余弦の符号が決定すると、(4.65) の a および b の大きさの関係——座標軸上の位置のこと。——は

決定する. (4.67) あるいは (4.68) ならば電位差 (4.66) を満足する.

$$L = (a-b) \times \cos\theta > 0 \dots (4.65)$$

$$\Delta V_{ab} = E \times L > 0 \dots (4.66)$$

$$\begin{cases} a > b \\ \cos\theta > 0 \end{cases} \dots (4.67)$$

$$\begin{cases} a < b \\ \cos\theta < 0 \end{cases} \dots (4.68)$$

常に余弦 (4.69) を満足するならば, 内積 (4.60) は (4.70) になる. 常に内積 (4.70) を満足するならば, 電位差 (4.71) が成立する. 電位差 (4.71) を使用すると, 電位差の定義 (2.1) から電位 (4.58) になる. 余弦 (4.69) は 点電荷の移動方向と静電場ベクトルの向きが直交している 場合である. 余弦 (4.69) の場合は, 5 章で説明する等電位面で計算できる.

$$\cos\theta = 0 \dots (4.69)$$

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \dots (4.70)$$

$$\Delta V_{ab} = 0 \dots (4.71)$$

$$\Delta V_{ab} \equiv V_b - V_a \dots (2.1)$$

$$V_a = V_b \dots (4.58)$$

## 5. 等電位面 (Equipotential surfaces)

静電場内の電位の等しい点をつないで作る面を等電位面と呼ぶ. 等電位面内では電位差は零である. 等電位面内に在る各位置の静電的ポテンシャルエネルギーが, その各位置に在る電気量から異なる値になることも (3.1) および (3.2) では明らかである. 静電場で等電位面上の点を決定することは, (4.3) から明らかである.

$$q U_b = q \times V_b \dots (3.1) \text{ 正の電気量 } q \text{ が在る位置 } b \text{ の点電荷 } m_q \text{ の静電的ポテンシャルエネルギー}$$

$$q U_a = q \times V_a \dots (3.2) \text{ 正の電気量 } q \text{ が在る位置 } a \text{ の点電荷 } m_q \text{ の静電的ポテンシャルエネルギー}$$

$$\Delta V_{ab} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \dots (4.3) \text{ 静電場内で点電荷が移動することを使用した技術}$$

ひとつの点電荷の電位差を (3.63) で記述できることは説明した. その説明の際に, 電位差 (3.63) の右辺が零になる位置関係 (3.64) を示した. 電気量 (3.62) を持つひとつの点電荷のみで生じる静電場内の位置関係 (3.64) を満足する各点は等電位面をつくる.

$$\Delta V_{ab} = V_b - V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1}{r_b} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1}{r_a}, (r_a = r_{a21}, r_b = r_{b21}) \dots (3.63)$$

$$r_b = r_a \dots (3.64)$$

$$q_1 = q_j = q_l \text{ C} \dots (3.62)$$

静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (4.1) の右辺の内積について考える. (4.1) の右辺の内積は (5.1) に記述できる. 内積 (5.1) では (5.2) および (5.3) を仮定する. 内積 (5.1) には点電荷の移動方向と静電気力の向きで決定する余弦を記述している. 内積 (5.1) で余弦 (5.4) を満足すると (5.5) になる. 余弦 (5.4) では 等電位面に対して静電気力の方向が直角である ことを示す. 常に内積 (5.5) が (4.1) で成立するならば (2.27) の分子の静電的ポテンシャルエネルギーの変化量は零となる. このために, (2.27) の左辺の電位差は零になる. さらに, 余弦 (5.4) では 等電位面に対して静電場ベクトルの方向が直角である ことを示す.

$$\Delta U_{ab} = -\int_a^b (q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} \dots (4.1)$$

$$(q \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = q \times E \times ds \times \cos\theta \dots (5.1)$$

$$E = |\mathbf{E}| > 0 \dots (5.2)$$

$$ds = |d\mathbf{s}| > 0 \dots (5.3)$$

$$\cos\theta = 0 \dots (5.4)$$

$$q \times E \times ds \times \cos\theta = 0 \dots (5.5)$$

$$\Delta V_{ab} = \frac{\Delta U_{ab}}{q} \dots (2.27)$$

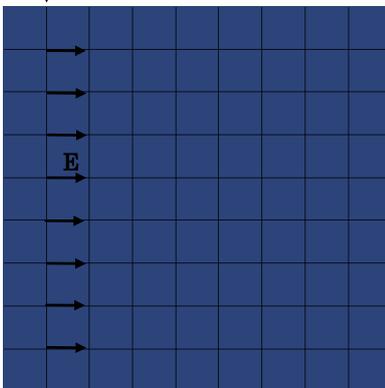
一様静電場内の等電位面の説明図を図 5.1 に載せた。電位差 (4.61) の場合の等電位面を図 5.1 に示している。図 5.1 の各縦線が等電位面になる。各横線上の異なる位置では異なる電位をもつ。厳密には、電位差 (4.61) の場合の縦線および横線は無数に存在することになり、図 5.1 のような網の目にはならない。図 5.1 では視覚で認識するために等間隔で縦線および横線を引いた。(4.61) の  $L$  の値が各縦線上では点電荷の移動方向は静電場ベクトルの向きに直交するために (5.5) をとる。(5.5) では、静電場内の位置  $a$  および位置  $b$  は異なる位置を意味する。このことは (4.62) の左辺に記述した余弦の値が余弦 (5.6) になる場合である。余弦 (5.6) では、等電位面に対する静電場の向きが直角になることを示す。

$$\Delta V_{ab} = -E \times \cos\theta \times (b-a) = E \times \cos\theta \times (a-b) = E \times L \dots (4.61)$$

$$L = 0, (a \neq b) \dots (5.5)$$

$$\cos\theta = 0 \dots (5.6)$$

等電位面



縦線は等電位面を示す。

横線上では異なる電位を示す。

→ : 図中の矢印は一様電場ベクトル  $\mathbf{E}$  の向きを示す。

$$\Delta V_{ab} = E \times L$$

$$L = (a-b) \times \cos\theta$$

図 5.1 一様電場内の等電位面の説明

等電位面上での一般的な静電場と電位差の関係を (4.3) で次のように考えることができる。(4.3) で内積 (5.7) を常に満足する場合は (4.3) の左辺の電位差は零である。この場合は、(5.8) ~ (5.10) を満足している。余弦 (5.10) の角度は静電場ベクトル  $\mathbf{E}$  の方向と点電荷の移動方向とは直角の関係であることを示す。

$$E \times ds \times \cos\theta = 0 \dots (5.7)$$

$$E = |\mathbf{E}| > 0 \dots (5.8)$$

$$ds = |d\mathbf{s}| > 0 \dots (5.9)$$

$$\cos\theta = 0 \dots (5.10)$$

## 6. 電位から計算した静電場

静電場内での静電気力が作用している点電荷が微小な位置の隔たりを移動した場合の仕事の近似の式を (6.1) とする。区間 (6.2) を使用して仕事 (6.1) の右辺の微小な位置の隔たりを変数 (6.3) で計算する。仕事 (6.1)

での右辺の静電場の関数 (6.4) は区間 (6.2) をその定義区間内に含むものとする. 静電場 (6.4) の定数 (6.5) は (6.2) 内の或る数であるものとする. 仕事の近似の式 (6.1) での点電荷は電気量 (6.6) を持つものとする.

$$W = (q \times E_0(\zeta_i)) \times \Delta s_i \dots (6.1) \text{仕事の近似の式}$$

$$(x_i, x_{i+1}) \dots (6.2) \text{区間}$$

$$\Delta s_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i (\neq 0) \dots (6.3) \text{変数}$$

$$E_0(\zeta_i) \dots (6.4)$$

$$\zeta_i \dots (6.5) \text{定数}$$

$$q > 0 \dots (6.6)$$

一方, 区間 (6.2) を定義区間を含む静電場 (6.4) 内の電位の関数を (6.7) とする. (3.7), 電気量 (6.6) および電位 (6.7) を使用して, その静電場内での静電的ポテンシャルエネルギーの変化量を (6.8) で記述する.

$$V(\zeta_i) \dots (6.7)$$

$$\Delta_q U_{ab} = q \times \Delta V_{ab} \dots (3.7)$$

$$\Delta U = q \times (V(\zeta_i + \Delta s_i) - V(\zeta_i)) \dots (6.8)$$

仕事の近似の式 (6.1) および静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (6.8) の関係は——本書の第1回の (3.4) を使用する. —— (6.9) で記述できるものとする. 関係 (6.9) の左辺に静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (6.8) の右辺を代入し, (6.9) の右辺に仕事の近似の式 (6.1) の右辺を代入すると近似の式 (6.10) を記述できる. 微小な位置の隔たり (6.3) および静電場の関数の独立変数 (6.5) は近似の式 (6.10) を満足するものとする.

$$\Delta U = -W \dots (6.9)$$

$$q \times (V(\zeta_i + \Delta s_i) - V(\zeta_i)) \approx -(q \times E_0(\zeta_i)) \times \Delta s_i \dots (6.10) \text{近似の計算}$$

ただし, 近似の式 (6.10) の左辺は (6.11) に記述できるものとする. そして, 一般的には, (6.10) は (6.11) での近似の計算として成立するものと考えることができる. (6.11) では無限小を使用している. 文献15で無限小  $o(h)$  ( $h \rightarrow 0$  のとき) の説明をした.

$$q \times (V(\zeta_i + \Delta s_i) - V(\zeta_i)) = -(q \times E_0(\zeta_i)) \times \Delta s_i + \alpha(\zeta_i; \Delta s_i), \left( \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \alpha(\zeta_i; \Delta s_i) = 0 \right), (\alpha(\zeta_i; \Delta s_i) = o(h), h \rightarrow 0 \text{ のとき}) \dots (6.11)$$

微小な位置の隔たり (6.3) を使用して (6.11) を (6.12) に記述する. (6.12) の両辺に極限値の計算を (6.13) のようにする. ただし, 極限値は (6.14) および (6.15) のように仮定する.

$$q \times \frac{V(\zeta_i + \Delta s_i) - V(\zeta_i)}{\Delta s_i} = -(q \times E_0(\zeta_i)) + \frac{\alpha(\zeta_i; \Delta s_i)}{\Delta s_i} \dots (6.12)$$

$$q \times \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \frac{V(\zeta_i + \Delta s_i) - V(\zeta_i)}{\Delta s_i} = -(q \times \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} E_0(\zeta_i)), \left( \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \frac{\alpha(\zeta_i; \Delta s_i)}{\Delta s_i} = 0 \right) \dots (6.13)$$

$$E_0(\zeta_i) = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} E_0(\zeta_i) \dots (6.14) \text{静電場の値は定数}$$

$$\frac{dV(\zeta_i)}{d\zeta_i} = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \frac{V(\zeta_i + \Delta s_i) - V(\zeta_i)}{\Delta s_i} \dots (6.15)$$

極限値 (6.14) および極限値 (6.15) を使用すると, (6.13) は (6.16) に記述できる. (6.16) は静電場 (6.17) に記述できる.

$$q \times \frac{dV(\zeta_i)}{d\zeta_i} = -q \times E_0(\zeta_i) \dots (6.16)$$

$$E_0(\zeta_i) = -\frac{dV(\zeta_i)}{d\zeta_i} \dots (6.17)$$

静電場 (6.17) の左辺に (6.18) を仮定すると、静電場 (6.17) を (6.19) に記述できる。静電場 (6.18) は位置の隔たり (6.3) の点電荷が移動する方向の静電場の方向成分になる。静電場 (6.19) では (6.20) が成立する。(6.21) を考慮すると静電場 (6.19) の右辺の最大値は (6.20) の左辺になる。ただし、静電場の大きさ (6.22) が成立するものとする。

$$E_0(\zeta_i) = E \times \cos\theta \dots (6.18)$$

$$E \times \cos\theta = -\frac{dV(\zeta_i)}{d\zeta_i} \dots (6.19)$$

$$E = -\frac{dV(\zeta_i)}{d\zeta_i}, (\cos\theta = 1) \dots (6.20)$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \dots (6.21)$$

$$E > 0 \dots (6.22) \text{ 静電場の大きさ}$$

(6.22) から静電場の大きさ (6.20) は (6.23) を満足する。静電場の大きさ (6.23) から (6.24) を記述できる。静電場の大きさ (6.23) では、(6.24) で電位が減少するように静電場の大きさが決定することは明らかである。

$$E = -\frac{dV(\zeta_i)}{d\zeta_i} > 0 \dots (6.23)$$

$$\frac{dV(\zeta_i)}{d\zeta_i} < 0 \dots (6.24)$$

(6.25) が成立する場合は、余弦 (6.26) が成立する。余弦 (6.26) ならば (6.24) になることは (6.25) から明らかである。余弦 (6.26) の場合は、電位の分布は (6.24) で減少するようになり、(6.25) の左辺は決定する。

$$E \times \cos\theta = -\frac{dV(\zeta_i)}{d\zeta_i} > 0 \dots (6.25)$$

$$\cos\theta > 0 \dots (6.26)$$

前回——本書の第3回——の (2.13) で (6.27) を説明した。(6.27) は空間の各軸——ここでは、直交座標で考える。x,y,z 軸——についての成分で分けている。静電場 (6.27) でも等電位面に直交する向きに静電場の向きを得ることになる。前回の (2.16) ~ (2.19) で静電場 (6.27) の電位の不定性については説明した。

$$\mathbf{E} = -\nabla V_r \dots (6.27)$$

## 7. 力学的エネルギー保存の法則と電位差

力学的エネルギー保存の法則での静電氣的ポテンシャルエネルギーの変化量 (3.7) について考える。静電場内で電気量 (7.1) のひとつの点電荷を考える。この点電荷には静電気力のみが作用するものとする。(7.2) はエネルギー原理に条件を記述した場合のものである。(7.2) の左辺は運動エネルギーの変化量である。(7.2) の右辺は負の符号および静電氣的ポテンシャルエネルギーの差である。(3.6) を使用して、静電氣的ポテンシャルエネルギーの差を (7.3) で記述できる。静電氣的ポテンシャルエネルギーの変化量 (7.3) を (7.2) の右辺に代入すると運動エネルギーの変化量 (7.4) になる。(7.4) では負号、電気量および電位差を使用して運動エネルギーの変化量を記述している。静電氣的ポテンシャルエネルギーの変化量 (7.3) を (7.2) に代入することで、運動エネルギーの変化量を (7.4) の電位差で考察できる。

$$q_0 \dots (7.1)$$

$$\Delta K = -\Delta U_{ab} \dots (7.2)$$

$$\Delta U_{ab} = q_0 \times \Delta V_{ab} \dots (7.3)$$

$$\Delta K = -q_0 \times \Delta V_{ab} \dots (7.4)$$

(7.4) を使用して運動エネルギーの増減および電位の増減についての電気量の符号の考察をする。運動エネルギーの変化量 (7.4) では、電位の減少 (7.5) および運動エネルギーの増加 (7.6) を満足するならば正の電気量 (7.7) になる。また、電位の減少 (7.5) および運動エネルギーの減少 (7.8) を満足するならば負の電気量 (7.9) になる。一方、運動エネルギーの増加 (7.6) および電位の増加 (7.10) を満足するならば負の電気量 (7.9) になる。また、運動エネルギーの減少 (7.8) および電位の増加 (7.10) を満足するならば正の電気量 (7.7) になる。

$$\Delta V_{ab} < 0 \dots (7.5)$$

$$\Delta K = -q_0 \times \Delta V_{ab} > 0 \dots (7.6)$$

$$q_0 > 0 \dots (7.7)$$

$$\Delta K = -q_0 \times \Delta V_{ab} < 0 \dots (7.8)$$

$$q_0 < 0 \dots (7.9)$$

$$\Delta V_{ab} > 0 \dots (7.10)$$

質点の力学的エネルギー保存の法則での計算を考える。この質点——点電荷としても扱う。——には静電気力のみが作用するものとする。(3.7) を使用して、静電場内の電位差が零の場合で (7.11) が記述できる。例として、(7.11) は等電位面で成立する。

$$\Delta U_{ab} = 0 \dots (7.11)$$

次に外力を仮定する。(7.11) が成立する場合で力学的エネルギー保存の法則を使用する。(7.12) の右辺をひとつの点電荷に作用している外力のなす仕事と仮定する。(7.12) の左辺は点電荷の運動エネルギーの変化量とする。

$$\Delta K = W \dots (7.12)$$

運動エネルギーの変化量 (7.13) が成立すると (7.12) では外力のなす仕事 (7.14) が成立する。本書の第4回では (7.14) を8章で次のように使用する。点電荷に作用するすべての力の合力が零で、その点電荷が移動できない場合において (7.14) が成立する。

$$\Delta K = 0 \dots (7.13)$$

$$W = 0 \dots (7.14)$$

## 8. 導体 (conductor)

導体では、電場の作用で電荷が自由に移動することができる。このような導体の性質を導電性と呼ぶ。静電場内では導体の電荷が移動して、導体が帯電状態になり、それから電荷の移動はなくなる。この電荷の移動がなくなることは、導体内の電子やイオンなどの電気量を持った物体の合力が静電場内で零になり移動しない場合にあるものと考えることができる。この導体内の電子、原子核あるいはイオンなどの電気量では静電的ポテンシャルエネルギーが生じているものと考え。しかし、この——ミクロのスケールでは——静電的ポテンシャルエネルギーをそれぞれ測定することは難しいものである。このために、マクロのスケールでの電場あるいは静電的ポテンシャルエネルギーの測定を行い、問題を考えることが一般的である。

ここでは、導体の電気量を考える場合には導体を構成するミクロのスケールの原子核や電子などの電気量を考えるのではなく、導体の表面に与えられた——表面に分布しているマクロのスケールの——電気量を考える。

本章では真空中の静電場内の導体について考える。静電場内に在る導体の内部の電場は零であり、その導体の各点の電位は等電位であるものとする。これらのことを (8.1) で記述した。

ただし、導体に電気量がなくてもその導体の電位は零であるとは限らない。このことについては付録 ii の導体系を構成している各導体の電位を記述した (a.2.6) でも考えている。

$$\begin{cases} V = \text{const. (導体の各点)} \\ \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (\text{導体の内部}) \end{cases} \dots (8.1)$$

導体に (8.2) の面電荷密度を仮定する。同じ導体に (8.3) の面電荷密度を仮定する。(8.2) および (8.3) の右辺の  $\Delta S_i$  は導体の表面積を  $n$  個に分割した各面積の中のひとつの面積である。(8.2) および (8.3) の左辺はそれぞれの面電荷密度に  $\Delta S_i$  を掛けて記述した電気量である。

$$\Delta q_{\sigma_i} = \sigma(P_i) \times \Delta S_i, (i=1, \dots, n) \dots (8.2)$$

$$\Delta q_{\sigma_0} = \sigma_0(P_i) \times \Delta S_i, (i=1, \dots, n) \dots (8.3)$$

(8.2) および (8.3) の電気量は (8.4) の関係にあるものと仮定する。(8.4) から面電荷密度 (8.5) を記述できる。(8.5) では (8.2) および (8.3) の面電荷密度は等しいものとなる。

$$\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i = \sigma(P_i) \times \Delta S_i \dots (8.4) \text{ 仮定}$$

$$\sigma_0(P_i) = \sigma(P_i) \dots (8.5)$$

仮定 (8.4) では、(8.5) のように面電荷密度が一意に決定する。(8.1) に従うと、導体の表面の電位は等電位である。このことを、電位 (8.6) を使用して計算することができる。(8.6) の 2 つの電位を使用して、導体の表面上の各点の電位を記述できるものとする。ただし、(8.6) の 2 つの電位の記述自体では、導体の表面上の各点の電位を記述できる保証はないものとする。

$$\Delta V_{\sigma_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\Delta q_{\sigma_i}}{r_{P_i}}, \quad \Delta V_{\sigma_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\Delta q_{\sigma_0}}{r_{P_i}} \dots (8.6)$$

(8.6) の電位の電気量に電気量 (8.2) および電気量 (8.3) を代入すると、(8.7) を記述できる。一方、電気量 (8.2) および電気量 (8.3) を使用して、電気量 (8.8) を記述する。電気量 (8.8) の各項の電気量は電位 (8.7) を記述する電気量であるものとする。

$$\Delta V_{\sigma_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}}, \quad \Delta V_{\sigma_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \dots (8.7)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta q_{\sigma_i} = \sum_{i=1}^n \sigma(P_i) \times \Delta S_i, \quad \sum_{i=1}^n \Delta q_{\sigma_0} = \sum_{i=1}^n \sigma_0(P_i) \times \Delta S_i \dots (8.8)$$

電気量 (8.8) の極限值 (8.9) が存在することを仮定する。極限值 (8.9) を (8.10) で記述する。極限值 (8.10) の電気量は、導体表面上の電気量の総和であるものとする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma(P_i) \times \Delta S_i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_0(P_i) \times \Delta S_i \dots (8.9)$$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma(P_i) \times \Delta S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_0(P_i) \times \Delta S_i \dots (8.10)$$

極限值 (8.10) は面積分 (8.11) としての記号で記述することができる。(8.10) を使用すると、面積分 (8.11) は導体表面上の電気量の総和 (8.12) として記述できる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma(P_i) \times \Delta S_i = \int_S \sigma(P) \times dS, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_0(P_i) \times \Delta S_i = \int_S \sigma_0(P) \times dS \dots (8.11)$$

$$q = \int_S \sigma(P) \times dS = \int_S \sigma_0(P) \times dS \dots (8.12)$$

導体表面上の電気量の総和 (8.12) および電位 (8.7) を使用して、導体の表面上の各点の電位を記述する。電位

(8.7) を使用して、電気量 (8.2) の面電荷密度で記述した電位 (8.13) を記述する. 同様に、電気量 (8.3) の面電荷密度で記述した電位 (8.14) を記述する.

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_{\sigma_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \dots (8.13)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_{\sigma_0 i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \dots (8.14)$$

電位 (8.13) の極限值 (8.15) が存在することを仮定する. 同様に、電位 (8.14) の極限值 (8.16) が存在することを仮定する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \dots (8.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \dots (8.16)$$

極限值 (8.17) を電気量 (8.2) の面電荷密度で記述した導体の表面上の各点の電位として記述する. 同様に、極限值 (8.18) を電気量 (8.3) の面電荷密度で記述した導体の表面上の各点の電位として記述する.

$$V_{\sigma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \dots (8.17)$$

$$V_{\sigma_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \dots (8.18)$$

電気量 (8.2) の面電荷密度で記述した極限值 (8.17) は面積分 (8.19) で記述できる. 電気量 (8.3) の面電荷密度で記述した極限值 (8.18) は面積分 (8.20) で記述できる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P) \times dS}{r_P} \dots (8.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P) \times dS}{r_P} \dots (8.20)$$

(8.17) ~ (8.20) を使用すると、(8.21) を記述できる. 導体の各点の電位は面電荷密度 (8.5) の両辺で等しいので、(8.21) の左辺は零になる. 次に、(8.21) の右辺が零になることを計算する.

$$V_{\sigma} - V_{\sigma_0} = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P) \times dS}{r_P} - \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P) \times dS}{r_P} \dots (8.21)$$

(8.21) の右辺は、(8.19) および (8.20) を使用すると (8.22) の右辺で記述できる. 極限值 (8.17) および極限值 (8.18) は収束することを仮定している. (8.17) および (8.18) は無限級数として扱うことができる.

$$\int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P) \times dS}{r_P} - \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P) \times dS}{r_P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \dots (8.22)$$

数学の解析学での無限級数の指導では次のようになる. ここでは、(8.13) および (8.14) がともに収束して、それらの和——無限級数の和のこと.——が (8.17) および (8.18) である. この場合では、(8.22) の右辺は (8.23) に記述できる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \right) \dots (8.23)$$

(8.23) の右辺は、(8.24) の右辺に記述できる. (8.5) を使用すると、(8.24) の右辺は (8.25) の右辺に記述できる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_0(P_i) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(\sigma(P_i) - \sigma_0(P_i)) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} \dots (8.24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(\sigma(P_i) - \sigma_0(P_i)) \times \Delta S_i}{r_{P_i}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{0 \times \Delta S_i}{r_{P_i}} = 0 \dots (8.25)$$

(8.21) および (8.25) を使用すると, (8.26) になる. (8.26) は (8.27) に書き直すことができる. (8.27) では, (8.5) の両辺の面電荷密度で記述した導体の或る点の電位は, 等しいことを示している. そして, (8.17) および (8.18) で, 導体の表面上の各点の電位を記述できることから (8.27) は導体の表面上の各点で記述できることになる.

$$V_\sigma - V_{\sigma_0} = 0 \dots (8.26)$$

$$V_\sigma = V_{\sigma_0} \dots (8.27)$$

仮定 (8.4) での一意に決定する面電荷密度 (8.5) を使用して導体の各点の電位は等しく記述できる.

電気量が導体の表面に分布している場合の面電荷密度を考える. 導体の内部の電場は零であるので, 導体の内部には導体表面に分布している電荷から生じる電気力も作用しない. このように静電気力が導体の内部では作用しないので, 導体内部の電子やイオンの移動は静電気力では生じない.

しかし, 静電気力は導体の表面の電荷には作用している. ここでは導体の各点の電位は等しいものとした. このために, 導体の表面は等電位面である. 等電位面には静電場ベクトルの向きは垂直である. この導体表面に垂直な方向に静電気力が作用しているために, その静電気力では点電荷は導体の表面を移動できない. 導体の表面を点電荷が移動するにはその導体表面の方向になる接線成分の方向に力が作用している必要がある. そして, 導体の表面に多くの点電荷が在るとするならば, それらの点電荷には互いにクーロン力が作用するものと考えられる. また, 導体表面上で摩擦による力が点電荷に作用しているかもしれない. 素粒子物理学では, '強い力' と呼ばれるものがある. この強い力が点電荷に作用しているものと説明されることもある. このように導体表面上の点電荷にはいろいろな力が作用しているものと考えることができる.

しかし, ここでは電荷に作用しているすべての力の合力は零であるものとする. このために各点電荷に作用するすべての力の合力のなす仕事は零になる. さらに, 導体の各点では等電位であるので, 導体の各点での静電的ポテンシャルエネルギーの差が零になることは (2.1) から明らかである. ここで, 他のポテンシャルエネルギーの差が零であるならば, 系の各点電荷のもつポテンシャルエネルギーの変化量 (7.11) が成立する. また, 各点電荷に作用するすべての力の合力のなす仕事が零であるので (7.14) が成立する. 系の各点電荷のもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (7.11) および仕事 (7.14) から系の各点電荷のもつ運動エネルギーの変化量 (7.13) が成立する. (7.13) では, 各点電荷の運動エネルギーの変化量は零である. ここでは, 静電場内に在る点電荷に作用するすべての力の合力が零であるので各点電荷を静止しているものとする.

$$\Delta U_{ab} = 0 \dots (7.11)$$

$$W = 0 \dots (7.14)$$

$$\Delta K = 0 \dots (7.13)$$

上述のことが, 導体表面上に在る点電荷に対する一般的な考察である. しかし, もし, 各点電荷に作用するすべての力の合力のなす仕事が零でないならば, 系の各点電荷のもつ静電的ポテンシャルエネルギーの変化量 (7.11) が成立するために (7.12) になる. この場合では, (7.12) では系の各点電荷のもつ運動エネルギーの変化量は零でない. そして, 一般には導体表面上に在る点電荷の速さが変化して, その点電荷が移動しているものと考えることができる.

$$\Delta K = W \dots (7.12)$$

次に導体系を考える。静電場内に各導体の電位——この電位は零でない。——が与えられたとすると、導体の各点の電位は等電位であるので (8.5) のように各導体の面電荷密度は一意に決定する。

(i) 導体系の各導体に電位が与えられると各導体の面電荷密度は (8.5) のように一意になる。

導体系の各導体の面電荷密度が2通りに与えられたとする。各導体は導体表面に電気量を持つので電場を考えることができる。しかし、各導体の内部では電場は零である。また、各導体は導体表面に電気量を持ち電位を各導体表面に考えることができる。各導体の電荷に作用しているすべての力の合力が零であり、それらの電荷の運動エネルギーの変化量およびポテンシャルエネルギーの変化量が零である。このために、各導体の表面に在る電荷は導体内部および表面で移動をしない。そして、面電荷密度が一通りで、各導体の電位は変化しない。このことから、各導体の電位差は変化しないものと考えることができる。導体系の或る導体の電気量に (8.2) の面電荷密度および (8.3) の面電荷密度を仮定して、面電荷密度 (8.28) も仮定する。導体系の或る導体の電気量が (8.12) で同じ場合には、(8.29) が成立するものとする。この場合では、(8.28) の電荷分布に対しては (8.29) が成立して、その導体の電気量は零になる。面電荷密度を持つ導体が電気量を持つことを前提にしているが、(8.29) はこの前提を満足していない。一方、仮定 (8.5) を使用すると (8.28) は (8.30) になる。電荷密度 (8.30) から (8.31) になる。面電荷密度 (8.31) では面電荷密度が一意なることを示す。

$$\sigma' = \sigma - \sigma_0 \dots (8.28)$$

$$q = \int_S \sigma(P) \times dS = \int_S \sigma_0(P) \times dS (\neq 0) \dots (8.12)$$

$$\int \sigma' \times dS = \int (\sigma - \sigma_0) \times dS = \int \sigma \times dS - \int \sigma_0 \times dS = q - q = 0 \dots (8.29)$$

$$\sigma_0(P_i) = \sigma(P_i) \dots (8.5)$$

$$\sigma' = \sigma - \sigma_0 = 0 \dots (8.30)$$

$$\sigma = \sigma_0 \dots (8.31)$$

(ii) 導体系の各導体に電気量 (8.12) が与えられると、各導体の面電荷密度は (8.31) のように一意である。

導体系の第 k 導体の電気量として極限值 (8.32) の存在を仮定する。その導体系の第 k 導体の電気量として極限值 (8.33) の存在を仮定する。極限值 (8.32) および極限值 (8.33) を面積分 (8.34) および面積分 (8.35) で記述する。

$$q_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_k(P_i) \times \Delta S_i \dots (8.32)$$

$$q'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i \dots (8.33)$$

$$q_k = \int \sigma_k \times dS \dots (8.34)$$

$$q'_k = \int \sigma'_k \times dS \dots (8.35)$$

そして、導体系の第 k 導体の電位として極限值 (8.36) の存在を仮定する。その導体系の第 k 導体の電位として極限值 (8.37) の存在を仮定する。極限值 (8.36) および極限值 (8.37) を面積分 (8.38) および面積分 (8.39) で記述する。

$$V_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_{Pi}} \dots (8.36)$$

$$V'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_{Pi}} \dots (8.37)$$

$$V_k = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_k(P) \times dS}{r_p} \dots (8.38)$$

$$V'_k = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma'_k(P) \times dS}{r_p} \dots (8.39)$$

電位 (8.38) および電位 (8.39) を使用して, 電位 (8.40) を記述する. 極限值 (8.36) および極限值 (8.37) を使用して, (8.40) の右辺を (8.41) の右辺で記述できる.

$$V_k + V'_k = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_k(P) \times dS}{r_p} + \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma'_k(P) \times dS}{r_p} \dots (8.40)$$

$$V_k + V'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_p} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_p} \dots (8.41)$$

極限值 (8.36) および極限值 (8.37) を無限級数として扱う. 数学の解析学では, 無限級数の和 (8.36) および無限級数の和 (8.37) は (8.42) を満足する. (8.42) の右辺は面積分 (8.43) で記述できる. (8.40) ~ (8.43) を使用すると, 面積分 (8.44) を記述できる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_p} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_p} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_p} \right) \dots (8.42)$$

$$V_k + V'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_p} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i}{r_p} \right) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(\sigma_k + \sigma'_k) \times dS}{r} \dots (8.43)$$

$$V_k + V'_k = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_k(P) \times dS}{r_p} + \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma'_k(P) \times dS}{r_p} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(\sigma_k + \sigma'_k) \times dS}{r} \dots (8.44)$$

電位 (8.44) の右辺を (8.45) で書き直す. (8.45) では面電荷密度 (8.46) を仮定している.

$$V_k + V'_k = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{(\sigma_k + \sigma'_k) \times dS}{r} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sigma_k'' \times dS}{r} \dots (8.45)$$

$$\sigma_k'' = \sigma_k + \sigma'_k \dots (8.46)$$

面電荷密度 (8.46) を使用して, 導体系の第 k 導体の電気量となる極限值 (8.47) の存在を仮定する. 極限值 (8.47) は面積分 (8.48) で記述できる.

$$q_k'' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_k''(P_i) \times \Delta S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\sigma_k(P_i) + \sigma'_k(P_i)) \times \Delta S_i \dots (8.47)$$

$$q_k'' = \int \sigma_k'' \times dS = \int (\sigma_k + \sigma'_k) \times dS \dots (8.48)$$

一方, 導体系の第 k 導体の電気量 (8.32) および導体系の第 k 導体の電気量 (8.33) を使用して, (8.49) を記述する. (8.42) の場合と同様に, 無限級数の和 (8.32) および無限級数の和 (8.33) では (8.50) が成立する. 無限級数の和 (8.50) の右辺は (8.51) に記述できる. 無限級数の和 (8.51) は (8.52) に記述できる.

$$q_k + q'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_k(P_i) \times \Delta S_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i \dots (8.49)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma_k(P_i) \times \Delta S_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\sigma_k(P_i) \times \Delta S_i + \sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i) \dots (8.50)$$

$$q_k + q'_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\sigma_k(P_i) \times \Delta S_i + \sigma'_k(P_i) \times \Delta S_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\sigma_k(P_i) + \sigma'_k(P_i)) \times \Delta S_i = q_k'' \dots (8.51)$$

$$q_k'' = \int \sigma_k'' \times dS = \int (\sigma_k + \sigma') \times dS = \int \sigma_k \times dS + \int \sigma' \times dS = q_k + q'_k \dots (8.52)$$

(8.44) および (8.45) を使用すると, (8.53) を記述できる. (8.52) のような電荷分布に対して (8.53) が成立することを導体系の重ね合わせの原理と呼ぶことがある.

$$V_k'' = V_k + V'_k \dots (8.53)$$

### 8.1 導体系の静電的ポテンシャルエネルギー

導体系の静電的ポテンシャルエネルギーを考える. 点電荷で構成している系の静電的ポテンシャルエネルギーを記述する. その後に, その点電荷の系の静電的ポテンシャルエネルギーの式を使用して導体系の静電的ポテンシャルエネルギーの式を記述する.

点電荷で構成する系を考える. この系の各点電荷の電気量および電位をそれぞれ (8.1.1) および (8.1.2) とする. 系を構成している点電荷間の相互作用で生じる静電的ポテンシャルエネルギーの総和を (8.1.3) で記述する. 本書の第2回で, (8.1.3) を説明した. 点電荷の系の静電的ポテンシャルエネルギー (8.1.3) は (8.1.4) のように展開することができる. (8.1.3) および (8.1.4) では (8.1.5) が成立する. 点電荷の系の静電的ポテンシャルエネルギー (8.1.4) は (8.1.6) に書き直すことができる. 点電荷の系の静電的ポテンシャルエネルギー (8.1.6) を (8.1.7) に記述する. 点電荷の系の静電的ポテンシャルエネルギー (8.1.6) では電位 (8.1.8) が成立する. (8.1.8) は系を構成する各点電荷の電位を記述した重ね合わせの原理である.

$$q_i \dots (8.1.1)$$

$$V_i \dots (8.1.2)$$

$$U = \sum_{i=2}^n U_i = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \dots (8.1.3)$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \dots + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_2 q_5}{r_{25}} + \dots + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} + \frac{q_3 q_5}{r_{35}} + \frac{q_3 q_6}{r_{36}} + \dots \right\} \dots (8.1.4)$$

$$r_{ij} = r_{ji} \dots (8.1.5)$$

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ q_1 \left( \frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} + \frac{q_4}{r_{14}} + \dots \right) + q_2 \left( \frac{q_1}{r_{21}} + \frac{q_3}{r_{23}} + \frac{q_4}{r_{24}} + \dots \right) + q_3 \left( \frac{q_1}{r_{31}} + \frac{q_2}{r_{32}} + \frac{q_4}{r_{34}} + \dots \right) + \dots \right\} \dots (8.1.6)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \times V_i \dots (8.1.7)$$

$$V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_j}{r_{ij}} \dots (8.1.8)$$

孤立導体の静電的ポテンシャルエネルギーを考える. 孤立導体を m 個の点電荷の系と見なす. 各点電荷の電気量の総和は, 孤立導体の電気量になるものとして (8.1.9) を記述できる. 導体の各点では等電位であるために, 各点電荷の在る位置の電位はすべて等しいことになる. このために (8.1.10) を記述できる. 電位 (8.1.10) を点電荷の系の静電的ポテンシャルエネルギー (8.1.7) に使用すると (8.1.11) が記述できる. 点電荷の系の静電的ポテンシャルエネルギー (8.1.11) の右辺に孤立導体の電気量 (8.1.9) を使用すると (8.1.12) に

なる。

$$q = \sum_{i=1}^m q_i \cdots (8.1.9)$$

$$V = V_i \cdots (8.1.10)$$

$$U = \frac{1}{2} V_i \sum_{i=1}^m q_i = \frac{1}{2} V \sum_{i=1}^m q_i \cdots (8.1.11)$$

$$U = \frac{1}{2} V \sum_{i=1}^m q_i = \frac{1}{2} V \cdot q \cdots (8.1.12)$$

導体で構成している系を考える。系を構成している導体の個数を  $n$  個とする。導体系の第  $i$  導体の電位はその導体系の他の導体の電位からの影響を受ける。この場合は、第  $i$  導体の電位は導体系の重ね合わせの原理で記述できる。第  $j$  導体の影響から生じた第  $i$  導体の電位を (8.1.13) で記述する。(8.1.13) を使用して重ね合わせの原理で第  $i$  導体の電位を (8.1.14) に記述する。第  $i$  導体の電位は (8.1.14) の左辺である。(8.1.14) の右辺は、重ね合わせの原理を記述している。

$$V_j^i \cdots (8.1.13)$$

$$V_i = \sum_{j=1}^n V_j^i \cdots (8.1.14)$$

ここで、導体系の各導体を  $m_i$  個の点電荷で構成しているものと見なす。このことから、ひとつの導体は  $m_i$  個の点電荷の系と見なすことができる。導体系の各導体は電気量  $q_i$  を持つものとする。各導体に (8.1.7) を使用して——ただし、 $n=m_i$  とする。——、各導体の静電的ポテンシャルエネルギーは (8.1.12) で記述できる。ただし、導体系の第  $i$  導体の電位には (8.1.14) での電位の重ね合わせの原理が成立する。

再び (8.1.7) を使用して、導体系の各導体を構成している点電荷ごとに (8.1.7) の電気量と電位をまとめて、(8.1.7) を (8.1.12) の和 (8.1.15) で記述する。(8.1.15) でこの導体系の静電的ポテンシャルエネルギーを記述できる。ただし、導体系の静電的ポテンシャルエネルギー (8.1.15) では第  $i$  導体の電位 (8.1.14) が成立する。付録 ii では電位係数を使用して、導体系の静電的ポテンシャルエネルギーを計算している。

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \times V_i \cdots (8.1.15)$$

## 8.2 ガウスの法則を使用した同心球および平行平板の電位差の計算

ガウスの法則 (Gauss' Law) を説明する。本書の第 2 回の (2.15), (2.16) および (2.18) で記述するよりも、ガウスの法則では電場を簡単に記述できる場合がある。本書の第 4 回では今後は、ガウスの法則を使用して電場を記述する。本書では、ガウスの法則については簡単な説明にする。

(8.2.1) がガウスの法則の積分形である。(8.2.2) はガウスの法則の微分形である。(8.2.1) および (8.2.2) の左辺に記述している (8.2.3) の左辺は電束密度ベクトルと呼ばれる。電束密度 (8.2.3) の右辺は電場と真空中の誘電率との積である。(8.2.1) の右辺は電気量であり、(8.2.4) あるいは (8.2.5) などで記述できる。

(8.2.4) はガウスの法則を使用して計算する対象である閉曲面内に在る電気量の総和である。(8.2.4) では、この閉曲面内の電気量を持っている点電荷の個数は  $n$  個とする。(8.2.5) もガウスの法則を使用して計算する対象である閉曲面内に在る総電気量である。(8.2.5) では、この閉曲面内の電気量の体積密度 (8.2.6) に (8.2.5) の右辺の体積積分をすることで閉曲面内の総電気量を得るものとする。(8.2.1) の左辺は計算対象の閉曲面の面積分である。(8.2.2) の左辺はナブラ——本書の第 3 回の (2.9) である。——と (8.2.3) の左辺の電束密度ベクトル との内積である。

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \dots (8.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \dots (8.2.2)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \dots (8.2.3)$$

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \dots (8.2.4)$$

$$Q = \int_c \rho dv \dots (8.2.5)$$

$$\rho \dots (8.2.6)$$

ガウスの法則を使用してクーロンの法則を記述できる。真空中にひとつの点電荷——この点電荷の電気量は (8.2.7) とする。——を考える。この点電荷を中心にした球面を考える。この球面上の2点間の電位差は (3.65) で説明したように零である。このために、この球面上の電位は (3.66) のように等しい。このために、この点電荷の球面上では等電位面になる。等電位面に対しての静電場の向きは直角になるために、(8.2.1) の面積分の面積元素のベクトル (8.2.8) の法線ベクトルと静電場の向きは等しい。この法線ベクトルは (8.2.8) の右辺のベクトルのことである。(8.2.8) の右辺は、曲面上の法線ベクトルと面積元素との積である。電束密度は (8.2.3) の右辺から静電場の向きと同じ向きになる。(8.2.1) の左辺の内積は (8.2.9) に記述できる。(8.2.9) を使用して (8.2.1) の左辺の面積分をすると (8.2.10) が記述できる。(8.2.10) の左辺の電束密度を静電場と真空中の誘電率で記述すると (8.2.11) になる。(8.2.11) は静電場 (8.2.12) に記述できる。(8.2.12) の静電場が在る球面上に電気量 (8.2.13) の点電荷を置くと (8.2.14) の静電気力が作用する。(8.2.14) の右辺の静電場に (8.2.12) の右辺を代入すると静電気力 (8.2.15) になる。静電気力 (8.2.15) を (8.2.16) に整理するとクーロンの法則になる。ガウスの法則を使用してクーロンの法則 (8.2.16) を導出できた。

$$Q \dots (8.2.7)$$

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \times dS, (|\mathbf{n}| = 1) \dots (8.2.8)$$

$$\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \times dS = \varepsilon_0 \times E \times 1 \times \cos 0 \times dS = \varepsilon_0 \times E \times dS \dots (8.2.9)$$

$$D \times (4 \times \pi \times r^2) = Q \dots (8.2.10)$$

$$(\varepsilon_0 \times E) \times (4 \times \pi \times r^2) = Q \dots (8.2.11)$$

$$E = \frac{Q}{4 \times \pi \times \varepsilon_0 \times r^2}, (r \neq 0) \dots (8.2.12)$$

$$q \dots (8.2.13)$$

$$F = q \times E \dots (8.2.14)$$

$$F = q \times \frac{Q}{4 \times \pi \times \varepsilon_0 \times r^2} \dots (8.2.15)$$

$$F = \frac{q \times Q}{4 \times \pi \times \varepsilon_0 \times r^2} \dots (8.2.16)$$

9章でコンデンサについて説明する。そのときに、同心球と平行平板のコンデンサの静電場から計算した電位差を使用する。以下では、そのための静電場および電位差を計算してみる。

図 8.2.1 のように同心の2つの球を考える。小さい球の半径は  $r_b$  である。大きい球は図 8.2.1 のように内側を包む球面とその外側に在る外面の球面を持つ。ここでは、内側を包む球面の半径  $r_a$  のみを考える。図 8.2.1 の半径  $r_b$  の小さい球は電気量 (8.2.17) を持つものとする。大きい球の半径  $r_a$  の球面には電気量 (8.2.18) を

持つものとする。この場合でこれらの球の中心から区間 (8.2.19) の範囲内での静電場を計算する。その後に (8.2.20) を積分区間とする電位差を計算する。静電場はガウスの法則を使用して計算する。区間 (8.2.19) では真空中の誘電率を使用できるものとする。

$$q > 0 \dots (8.2.17)$$

$$-q < 0 \dots (8.2.18)$$

$$r_b < r < r_a \dots (8.2.19)$$

$$r_b \leq r \leq r_a \dots (8.2.20)$$

区間 (8.2.19) での静電場を  $E$  とする。(8.2.21) のように (8.2.19) の  $r$  を半径とする球面を考える。この球面内には電気量は (8.2.17) のみである。このために、この球面の表面積と静電場  $E$  の積ではガウスの法則を使用して (8.2.21) を記述できる。(8.2.21) を静電場 (8.2.22) に記述する。(8.2.22) が区間 (8.2.19) での静電場となる。静電場 (8.2.22) の記述では、導体球の表面の電荷が導体球の中心に集中している——点電荷として見なす。——ものと見なすことができる。

$$(4 \times \pi \times r^2) \times (\epsilon_0 \times E) = q \dots (8.2.21)$$

$$E = \frac{q}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r^2} \dots (8.2.22)$$

次に (8.2.20) を積分区間とする電位差を仮定する。電位差を計算するために (4.43) の右辺に記述してある仕事を計算する。半径  $r_a$  の位置に電気量 (8.2.23) の点電荷が在るものとする。半径  $r_a$  から半径  $r_b$  まで、この点電荷を移動させる。この点電荷には (8.2.24) の静電気力が作用しているものとする。このために、この静電気力 (8.2.24) のなす仕事は (8.2.25) で記述できる。ただし、ガウスの法則で静電場を計算した際に使用した閉曲面内 (8.2.19) とは異なる区間 (8.2.20) を積分区間とした。しかし、導体球の表面上の静電場は (8.2.22) で記述できる——導体表面上の電荷分布を一様であるものとする。——ものとし、仕事 (8.2.25) では積分区間 (8.2.20) を使用できるものとする。この導体表面上の静電場の式はガウスの法則および電気力管を使用して導出できる。ただし、本書には導体表面上の静電場の式の導出方法は説明していない。

$$\Delta V_{ab} = \frac{-W_{ab}}{q} \dots (4.43)$$

$$q_0 > 0 \dots (8.2.23)$$

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} \dots (8.2.24)$$

$$W_{r_a r_b} = \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_a}^{r_b} (q_0 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{r} \dots (8.2.25)$$

(8.2.22) を使用して仕事 (8.2.25) を (8.2.26) に記述する。(8.2.25) の仕事と静電気力 (8.2.24) のポテンシャルエネルギーの変化量との関係——本書の第1回の (3.4) で説明した。——は (8.2.27) で記述できる。

$$W_{r_a r_b} = \int_{r_a}^{r_b} (q_0 E) dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r^2} dr \dots (8.2.26)$$

$$\Delta U_{r_a r_b} = -W_{r_a r_b} = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r^2} dr \dots (8.2.27)$$

(4.43) を使用すると電位差 (8.2.28) を記述できる。電位差 (8.2.28) の右辺は (8.2.29) のように計算できる。

$$\Delta V_{r_a r_b} = \frac{\Delta U_{r_a r_b}}{q_0} = \frac{-W_{r_a r_b}}{q_0} = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r^2} dr \dots (8.2.28)$$

$$\Delta V_{r_a r_b} = - \int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r^2} dr = - \left[ \frac{-q}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r} \right]_{r_a}^{r_b} = \frac{q}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r_b} - \frac{q}{4 \times \pi \times \epsilon_0 \times r_a} \dots (8.2.29)$$

電位差 (8.2.29) の右辺は (8.2.30) に整理できる. 電位差 (8.2.30) の左辺を (8.2.31) に記述できるならば, 電位差 (8.2.30) を (8.2.32) に記述できる.

$$\Delta V_{r_a r_b} = \frac{q}{4 \times \pi \times \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \dots (8.2.30)$$

$$\Delta V_{r_a r_b} = V_b - V_a \dots (8.2.31)$$

$$V_b - V_a = \frac{q}{4 \times \pi \times \epsilon_0} \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \dots (8.2.32)$$

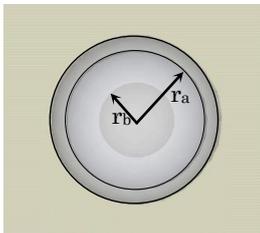


図 8.2.1 同心球殻の静電場および電位差

ガウスの法則を使用して図 8.2.2 の 2 つの平行平板内の静電場の計算をする. 静電場と面積元素の単位法線ベクトルとの内積を考える. 図 8.2.2 の上方に在る平板の表面に示した総電気量を (8.2.33) とする. 図 8.2.2 の 2 つの平面極板内の静電場  $E$  に平行な方向の単位法線ベクトルを持つ曲面の面積を  $A$  とする. 静電場  $E$  に垂直な方向の単位法線ベクトル——曲面の単位法線ベクトルである. ——と静電場との内積は零になる. ガウスの法則から (8.2.34) を記述できる. (8.2.34) を静電場 (8.2.35) に整理する. 静電場 (8.2.35) の右辺の電気量および面積が変化しないならば, (8.2.35) の左辺は一樣な静電場となる.

$$q_1 > 0 \dots (8.2.33)$$

$$A(\epsilon_0 E) = q_1 \dots (8.2.34)$$

$$E = \frac{q_1}{\epsilon_0 A}, (A \neq 0) \dots (8.2.35)$$

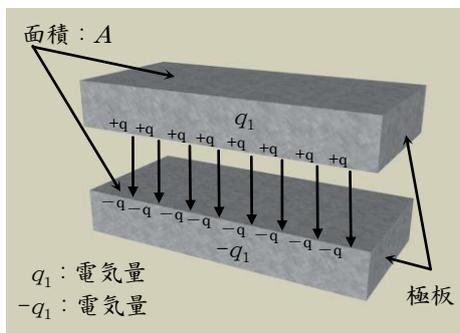


図 8.2.2 平面導体板の静電場

### 9. コンデンサ (condenser)

9 章ではコンデンサと呼ばれる装置について, 静電容量を使用して説明をする. コンデンサは回路素子としても使われる. 本書は電気の回路論であるので第 5 回で回路方程式を記述する際に回路の素子としてのコンデンサ

を使用する。本章では最初にひとつの導体の静電容量を説明する。その静電容量を使用してコンデンサの容量の説明をする。そして、コンデンサの静電的ポテンシャルエネルギーの計算をする。最後に、系のエネルギー保存則を使用してコンデンサの静電的ポテンシャルエネルギーについて考察する。

電位あるいは電位差が電気量に比例することを本書の第4回の8章までで計算した。この比例の関係がクーロンの法則から導出する電位および電位差では次のように扱うことができる。電気量を独立変数とする——他の値はすべて定数として扱う。——関数として電位あるいは電位差を扱うことで、その関数の従属変数のグラフが線形のグラフになる。本書では、この線形の関係から静電容量およびコンデンサの容量を記述する。

ひとつの導体について考える。その導体の電気量 (9.1) および電位 (9.2) を仮定する。このとき、(9.3) の左辺をその導体の静電容量——あるいは電気容量——と呼ぶ。(9.3) の右辺の静電容量の単位 F は farad と呼ぶ。導体系で考える場合は、その導体系の他の導体の電位はすべて零であるものとする。

$$q \dots (9.1)$$

$$V \dots (9.2)$$

$$CF = \frac{q}{V} \frac{C}{V}, (V \neq 0) \dots (9.3)$$

2つの導体について考える。2つの導体の電気量は第1導体の (9.4) および第2導体の (9.5) とする。第1導体の電位を (9.6) とする。第2導体の電位を (9.7) とする。2つの導体の電位差は (9.8) とする。導体系で考える場合は、その導体系の他の導体の電気量は常に零であるものとする。 この場合の (9.9) を2つの導体間の静電容量——あるいは電気容量——と呼ぶ。

$$-q \dots (9.4)$$

$$q \dots (9.5)$$

$$V_1 \dots (9.6)$$

$$V_2 \dots (9.7)$$

$$V_2 - V_1 \dots (9.8)$$

$$CF = \frac{q}{V_2 - V_1} \frac{C}{V}, (V_2 - V_1 \neq 0) \dots (9.9)$$

一般的に、2つの導体間——各導体はそれぞれ電気量  $q$ ,  $-q$  のみをもつ。——に電気量を蓄積する装置をコンデンサと呼ぶことがある。2つの導体のひとつを第1導体と呼び、他の導体を第2導体と呼ぶ。第1導体の電極の電気量および電位をそれぞれ (9.4) および (9.6) とする。第2導体の電極の電気量および電位をそれぞれ (9.5) および (9.7) とする。このときの、導体間の電位差を (9.8) とする。この場合の2つの導体間の静電容量はコンデンサの容量として (9.10) で与える。

$$CF = \frac{q}{V_2 - V_1} \frac{C}{V}, (V_2 - V_1 \neq 0) \dots (9.10)$$

第1導体および第2導体の静電容量は (9.3) を使用すると、第1導体の静電容量 (9.11) および第2導体の静電容量 (9.12) で記述できる。静電容量 (9.11) および静電容量 (9.12) をコンデンサの容量 (9.10) に代入すると (9.13) になる。コンデンサの容量 (9.13) は (9.14) に整理できる。コンデンサの容量 (9.14) は (9.15) で各容量の関係を記述することができる。

$$C_1 = \frac{-q}{V_1}, (V_1 \neq 0) \dots (9.11)$$

$$C_2 = \frac{q}{V_2}, (V_2 \neq 0) \dots (9.12)$$

$$C = \frac{q}{\frac{q}{C_2} - \frac{-q}{C_1}} = \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}}, (V_2 - V_1 \neq 0) \dots (9.13)$$

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}, (V_2 - V_1 \neq 0) \dots (9.14)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, (V_2 - V_1 \neq 0) \dots (9.15)$$

一般には、付録iiの(a.2.6)を使用すると、導体系を構成している各導体の電位および電気量の関係を記述できる。付録iiの(a.2.6)では、その導体系を構成している導体では、その導体の電気量が常に零になってもその導体の電位は零であるものとは限らない。

図9.1は同心の球殻で構成しているコンデンサである。図9.1の球殻の小さい球——半径は $r_b$ である。——と大きい球——内側の球面の半径は $r_a$ ——の間の電位差で容量を計算する。(9.16)は——(8.2.32)で計算した電位差である。——この大きい球と小さい球の間の電位差である。ただし、コンデンサの電気量を $q_1$ としている。電位差(9.16)を(9.17)に整理する。容量(9.10)を使用すると電位差(9.17)から容量(9.18)でコンデンサの容量を記述できる。

$$V_b - V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1}{r_b} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{q_1}{r_a} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \times \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) \dots (9.16)$$

$$V_b - V_a = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \times \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{r_a - r_b}{r_b \times r_a} \dots (9.17)$$

$$C = \frac{q_1}{V_b - V_a} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_b \times r_a}{r_a - r_b}, (V_b - V_a \neq 0) \dots (9.18)$$

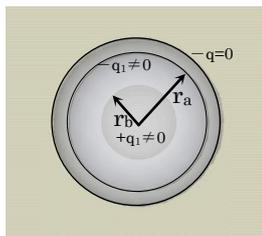


図 9.1 2つの同心球殻で構成しているコンデンサ

図9.1の大きい球の内面球の半径 $r_a$ を $\infty$ に近づけて(9.19)の極限値を計算すると、孤立導体球のコンデンサの容量を(9.20)に記述できる。

$$V_l = \lim_{r_a \rightarrow \infty} (V_b - V_a) = \lim_{r_a \rightarrow \infty} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \times \left( \frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r_b} \dots (9.19)$$

$$C = \frac{q_1}{V_l} = 4\pi\epsilon_0 r_b, (V_l \neq 0) \dots (9.20)$$

図9.2は平行平板コンデンサの説明図である。 $d$ は極板間の距離である。 $S$ は各極板の面積である。平行平板の間に生じる静電場を(9.21)で記述できる。静電場(9.21)の右辺——(8.2.35)で計算した静電場である。

——を定数として考えると，図 9.2 の極板間に生じる静電場は一様な静電場である．この一様な静電場の電位差は (9.22) で——4 章で一様な静電場について計算した．——記述できる．容量 (9.10)，静電場 (9.21) および電位差 (9.22) を使用すると (9.23) でコンデンサの容量を記述できる．容量 (9.23) の右辺では，極板の面積  $S$  と極板間距離  $d$  ——誘電率は真空の誘電率として扱う．——でコンデンサの容量を記述できる．

$$E = \frac{q_1}{\epsilon_0 \times S}, (S \neq 0) \dots (9.21)$$

$$V_2 - V_1 = E \times d \dots (9.22)$$

$$C = \frac{q_1}{V_2 - V_1} = \frac{q_1}{E \times d} = \frac{q_1}{\frac{q_1}{\epsilon_0 \times S} \times d} = \frac{\epsilon_0 \times S}{d}, (V_2 - V_1 \neq 0, d \neq 0) \dots (9.23)$$

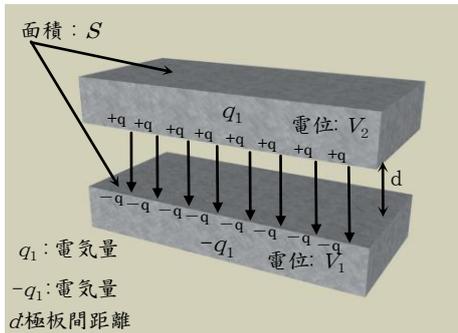


図 9.2 平行平板コンデンサの説明図

コンデンサの静電的ポテンシャルエネルギーを計算する．この静電的ポテンシャルエネルギーは回路方程式を導出する際に使用する．この回路方程式の導出の際には，コンデンサの静電的ポテンシャルエネルギーの差を系のエネルギー保存則で使用するようになる．本書の第 5 回で，この回路方程式の導出について説明する．回路での線形素子としてのコンデンサの説明を本書の付録 iii で与えた．

ここでは，区間 (9.24) を仮定する．区間 (9.24) は，コンデンサに与える電気量を数とする区間である．区間 (9.24) に分割  $P$  (9.25) を考える．分割  $P$  (9.25) では，区間 (9.26) を記述できる．区間 (9.26) 内の点  $\zeta_i$  (9.27) が存在する．区間 (9.26) 内の点  $\zeta_i$  (9.27) に対応するコンデンサの電位差を (9.28) で記述できるものと仮定する．

$$[0, q] \dots (9.24) \text{ 区間}$$

$$0 = q_0 < \dots < q_i < \dots < q_n = q \dots (9.25) \text{ 分割 } P$$

$$[q_{i-1}, q_i], (i=1, \dots, n) \dots (9.26) \text{ 分割 } P \text{ の各区間}$$

$$q_{i-1} < \zeta_i < q_i \dots (9.27) \text{ 区間 (9.26) 内の点}$$

$$V(\zeta_i) \dots (9.28)$$

そして，区間 (9.26) の長さ (9.29) を使用して，電気量 (9.29) を与えられたコンデンサの静電的ポテンシャルエネルギーを近似の計算として (9.30) で記述できるものと仮定する．近似の計算としての (9.30) では，電気量 (9.26) を与えたコンデンサには近似の計算としての電位差となる (9.28) が生じていることになる．

$$\Delta q_i = q_i - q_{i-1} \dots (9.29) \text{ 区間 (9.26) の長さ}$$

$$\Delta U_i = V(\zeta_i) \Delta q_i \dots (9.30)$$

ここで，極限值 (9.31) が存在することを仮定する．極限值 (9.31) の左辺に記述した和 (9.32) はリーマン和とする．その極限值 (9.31) の左辺に記述した  $\lambda$  は分割  $P$  の各区間 (9.26) の長さ (9.29) の中で最大の長さのものを意味する．

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_i V(\xi_i) \Delta q_i = U(q) - U(0) \dots (9.31)$$

$$\sum_i V(\xi_i) \Delta q_i \dots (9.32) \text{ リーマン和}$$

極限值 (9.31) の左辺はリーマン積分 (9.33) に記述できる。リーマン積分 (9.33) を使用すると、極限值 (9.31) は (9.34) に記述できる。(9.34) では、そのコンデンサに電気量を 0 から  $q$  まで与えた場合のコンデンサの静電的ポテンシャルエネルギーの差を記述している。

$$\int_0^q V(q) dq \dots (9.33) \text{ リーマン積分}$$

$$U(q) - U(0) = \int_0^q dU = \int_0^q V dq \dots (9.34)$$

コンデンサの電位差の電気量およびコンデンサの容量の関係 (9.35) を使用すると、積分 (9.34) は (9.36) に記述できる。コンデンサの静電的ポテンシャルエネルギー (9.36) は (9.37) に書き直すことができる。一般に積分 (9.34) の静電的ポテンシャルエネルギーは (9.35) の電位の閉区間  $[0, q]$  上の原始関数として扱うものとの判断は、経験からの著者の考えである。

$$q = C \times V \dots (9.35)$$

$$U = \int_0^q V(q) dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \left[ \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right]_0^q = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, (C \neq 0) \dots (9.36)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} q \cdot V \dots (9.37)$$

(9.38) は系のエネルギー保存則の記述である。(9.38) の左辺の第一項は系のポテンシャルエネルギーの変化量である。(9.38) の左辺の第二項は運動エネルギーの変化量である。(9.38) の左辺の第三項は系の内部エネルギーの変化量である。(9.38) の右辺では系へ加えている外力のなす仕事を意味する。ここでは、コンデンサの電気量を点電荷の電気量の総和で考える。そして、それらの点電荷で構成する系を考えることにする。このような場合で、コンデンサでは (9.39) および (9.40) を前提として系の静電的ポテンシャルエネルギーの変化量を (9.41) で考える。(9.41) ではコンデンサの点電荷で構成する系の静電的ポテンシャルエネルギーの変化量はコンデンサに作用している外力のなす仕事に等しいことを意味する。ただし、このコンデンサに作用する外力で、その系を構成する各点電荷が移動するものとする。

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{internal}} = W_{\text{external}} \dots (9.38)$$

$$\Delta E_{\text{internal}} = 0 \dots (9.39)$$

$$\Delta K = 0 \dots (9.40)$$

$$\Delta U = W_{\text{external}} \dots (9.41)$$

## 10.あとがき

本書の第4回では電位差のお話しであった。電位差を定義したことで、導体の静電的ポテンシャルエネルギーまで説明できた。9章での系のエネルギー保存則の箇所では、導体の静電的ポテンシャルエネルギーを系のポテンシャルエネルギーとして扱って説明した。この考えは、電気の回路で回路方程式を記述する際に応用できる。日本の一般的な回路方程式の記述の指導には、キルヒホッフの第1法則およびキルヒホッフの第2法則を使用する。そして、系のエネルギー保存則からも回路方程式を記述することができる。一般には、その記述された回路方程式はキルヒホッフの法則を使用した場合と同じに整理できる。次回——第5回のこと。——ではキルヒホッフの第1法則およびキルヒホッフの第2法則を電気量の保存および系のエネルギー保存則を使用して説明する。

次回では、起電力、電流、電力、電気抵抗、インダクタンス、回路素子の記号およびインピーダンスについて説明をする。数学の技術においては、2007年現在までの日本国内の専門書で指導されてきた一般的な微分法論とは異なる微分の定義を使用する。この微分法論の導入は著者の独自の判断によるものである。2007年現在までの日本国内の電磁気学および電気回路論の一般的な専門書ではこの微分の定義を使用した指導はされていないものと著者は判断している。

回次の起電力の説明では第5回で使用する起電力の定義を与える。この起電力の定義も2007年現在までの日本国内の電気回路論の一般的な専門書では与えられていないものと著者は認識している。電流の説明ではマクスウェルの方程式系の基礎方程式を使用して電流および磁場の関係を説明する。そして、磁気力を使用して磁束密度ベクトルの定義を説明する。インダクタンスの説明ではマクスウェルの方程式系の基礎方程式を使用して誘導起電力と呼ばれる起電力を説明する。この誘導起電力の説明では上述した起電力の定義を使用する。誘導起電力から生じる誘導電流の説明にはレンツの法則と呼ばれる知識を使用する。また、誘導起電力の説明では動的な電場の説明をする。第4回までは静電場——静的な電場である。——で保存力となる静電気力を使用してきた。動的な電場の電気力は保存力とはならないことを示す。

単位においては国際単位系について説明をする。国際単位系については本書の第2回で簡単に触れた。第5回の国際単位系についての説明は第2回のものよりも詳しいものである。また、国際単位系の権威的な文書として紹介されることがあるPDFファイルを使用している。このPDFファイルはインターネットから無償でダウンロード可能なものである。国際単位系の学習にはとても役立つものと2007年現在の著者は考えている。そして、この国際単位系のPDFファイルを使用して電流および電気量の単位量の計算を試みる。

本書の第1回～第4回までは電磁気学での説明を工学論として整理したものであった。本書の第5回は電圧のお話しである。次回は、回路方程式を記述することになり、工学の回路論としての基礎的な部分となる内容である。

## 付録

## i. 誘電率について

本文では誘電率はすべて真空中の誘電率で計算している。ここでは、一般の誘電率の場合を考える。特に、誘電率が負の場合について考える。

誘電率が (a.1.1) の空間に電気量 (a.1.2) の点電荷が在る場合を仮定する。点電荷を中心とする球面を考える。この球面の半径を  $r_a$  と  $r_b$  の2つについて考える。これらの半径には (a.1.3) の関係がある。この各球面上の2点の電位差は (a.1.4) で記述できる。

$$\varepsilon \cdots (a.1.1)$$

$$q_1 \text{ C} \cdots (a.1.2)$$

$$r_b < r_a \cdots (a.1.3)$$

$$V_b - V_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \times \frac{q_1}{r_b} - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \times \frac{q_1}{r_a} \cdots (a.1.4)$$

(a.1.4) で (a.1.5) および (a.1.6) の場合を考えることができる。(a.1.5) の場合には (a.1.7) での電位差が真空中の誘電率のときと同様の符号を得る。(a.1.6) の場合は (a.1.8) となる。(a.1.7) の符号とは (a.1.8) の符号は反対になる。

$$\varepsilon > 0 \cdots (a.1.5)$$

$$\varepsilon < 0 \cdots (a.1.6)$$

$$V_b - V_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \times \frac{q_1}{r_b} - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \times \frac{q_1}{r_a} > 0 \cdots (a.1.7)$$

$$V_b - V_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \times \frac{q_1}{r_b} - \frac{1}{4\pi\varepsilon} \times \frac{q_1}{r_a} < 0 \cdots (a.1.8)$$

## ii. 電位係数を使用した導体系の静電的ポテンシャルエネルギー

$n$  個の導体で構成する導体系を考える。(a.2.1) は第  $i$  導体の電位である。(a.2.2) は第  $i$  導体の電気量である。第  $i$  導体の電位は他の導体の電位の影響を受ける。この影響を導体の電気量 (a.2.2) と各導体の相互作用の係数となる (a.2.3) で記述できるものとする。第  $j$  導体の影響で生じている第  $i$  導体の電位を (a.2.4) で記述する。ただし、(a.2.5) が成立する。

$$v_i \cdots (a.2.1)$$

$$q_i \cdots (a.2.2)$$

$$a_{ij} \cdots (a.2.3)$$

$$a_{ij} \times q_j \cdots (a.2.4)$$

$$a_{ij} = a_{ji} \cdots (a.2.5)$$

(a.2.4) を使用してこの導体系の各導体の電位を (a.2.6) —— 8章の導体系の重ね合わせの原理を使用した。—— で記述できる。(a.2.6) の (a.2.3) を電位係数と呼ぶ。各導体間の距離・導体の形状・導体の在る空間の性質——誘電率・場の状態などのこと。——などで、電位係数は決定するものと考えることができる。導体が  $n$  個の場合では、(a.2.6) の電位係数が  $n \times n$  個となることは (a.2.6) から明らかである。

$$\begin{cases} v_1 = a_{11} \cdot q_1 + a_{12} \cdot q_2 + a_{13} \cdot q_3 + a_{14} \cdot q_4 + a_{15} \cdot q_5 + \dots + a_{1, n-1} \cdot q_{n-1} + a_{1n} \cdot q_n \\ v_2 = a_{21} \cdot q_1 + a_{22} \cdot q_2 + a_{23} \cdot q_3 + a_{24} \cdot q_4 + a_{25} \cdot q_5 + \dots + a_{2, n-1} \cdot q_{n-1} + a_{2n} \cdot q_n \\ v_3 = a_{31} \cdot q_1 + a_{32} \cdot q_2 + a_{33} \cdot q_3 + a_{34} \cdot q_4 + a_{35} \cdot q_5 + \dots + a_{3, n-1} \cdot q_{n-1} + a_{3n} \cdot q_n \\ \vdots \\ v_{n-1} = a_{n-1,1} \cdot q_1 + a_{n-1,2} \cdot q_2 + a_{n-1,3} \cdot q_3 + a_{n-1,4} \cdot q_4 + a_{n-1,5} \cdot q_5 + \dots + a_{n-1, n-1} \cdot q_{n-1} + a_{n-1, n} \cdot q_n \\ v_n = a_{n1} \cdot q_1 + a_{n2} \cdot q_2 + a_{n3} \cdot q_3 + a_{n4} \cdot q_4 + a_{n5} \cdot q_5 + \dots + a_{n, n-1} \cdot q_{n-1} + a_{nn} \cdot q_n \\ a_{ij} = a_{ji} \end{cases} \dots(a.2.6)$$

導体系の n 個の各導体の電位および電気量は零であるものとする。この導体系では最初に、第 1 導体に  $q_1$  の電気量を与えると、第 1 導体の電位は (a.2.7) で記述できる。

第 1 導体の電位を (a.2.7) の左辺の電位で記述できる場合に、電気量 (a.2.8) をその第 1 導体に与える。この場合は、(a.2.9) で近似の計算としての第 1 導体の静電的ポテンシャルエネルギーを記述できるものとする。近似の計算としての静電的ポテンシャルエネルギー (a.2.9) では、近似の計算としての右辺の電位が第 1 導体に生じていることになる。

$$v_1 = a_{11} \cdot q_1 \dots(a.2.7)$$

$$\Delta q_{1i} = q_{1i} - q_{1i-1}, (0 = q_{10} < \dots < q_{1i} < \dots < q_{1n} = q_1, [0, q_1]) \dots(a.2.8)$$

$$\Delta U_{1i} = v_1(q_{1\bar{i}}) \cdot \Delta q_{1i}, (q_{1\bar{i}} \in [q_{1i-1}, q_{1i}], (i = 1, \dots, n)) \dots(a.2.9)$$

ここで、極限值 (a.2.10) が存在することを仮定する。極限值 (a.2.10) の右辺には、第 1 導体の静電的ポテンシャルエネルギーの差を記述している。極限值 (a.2.10) の左辺の極限值を記述するのに使用した (a.2.11) はリーマン和と呼ばれるものである。(a.2.10) の左辺に記述した  $\lambda_1$  は、リーマン和 (a.2.11) を記述している区間  $[q_{1, i-1}, q_{1, i}]$  の長さ (a.2.8) の中で最大の長さのものとする。第 1 導体の (a.2.9) を使用して、リーマン和 (a.2.11) を記述している。

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_1(q_{1\bar{i}}) \cdot \Delta q_{1i} = U_1(q_1) - U_1(q_{10}) \dots(a.2.10)$$

$$\sum_{i=1}^n v_1(q_{1\bar{i}}) \cdot \Delta q_{1i} \dots(a.2.11) \text{ リーマン和}$$

リーマン和 (a.2.11) を使用した極限值 (a.2.10) は、積分として (a.2.12) で記述できる。電気量を 0 から  $q_1$  になるまで第 1 導体に与える場合の静電的ポテンシャルエネルギーは積分 (a.2.12) で記述できる。一般に積分 (a.2.10) の静電的ポテンシャルエネルギーは電位 (a.2.7) の閉区間  $[0, q_1]$  上の原始関数として扱うものとの判断は、経験からの著者の考えである。

$$U_1 = \int_0^{q_1} dU = \int_0^{q_1} v_1 \cdot dq_1 = \int_0^{q_1} a_{11} q_1 \cdot dq_1 = \frac{1}{2} a_{11} \cdot q_1^2 \dots(a.2.12)$$

第 1 導体に  $q_1$  の電気量を与えた次には、第 2 導体に電気量  $q_2$  を与える。第 2 導体には第 1 導体を持つ電気量  $q_1$  の影響で第 2 導体の電位—— (a.2.13) の右辺の第一項のこと。——が生じている。ここで、第 2 導体に電気量  $q_2$  を与えた場合は、その第 2 導体の電位は (a.2.13) の右辺で記述できる。(a.2.13) の第二項は第 2 導体に電気量  $q_2$  を与えたことで生じる第 2 導体の電位である。

$$v_2 = a_{21} \cdot q_1 + a_{22} \cdot q_2 \dots(a.2.13)$$

第 2 導体の電位を (a.2.13) で記述できる場合に、その第 2 導体に電気量 (a.2.14) を与える。第 2 導体の静電的ポテンシャルエネルギーは近似の計算として (a.2.15) で記述できるものとする。この場合は、(a.2.15) で近似の計算としての第 2 導体の静電的ポテンシャルエネルギーを記述できるものとする。近似の計算としての

静電的ポテンシャルエネルギーとなる (a.2.15) では、近似の計算としての右辺の電位が第 2 導体に生じていることになる。

$$\Delta q_{2i} = q_{2i} - q_{2i-1}, (0 = q_{20} < \dots < q_{2i} < \dots < q_{2n} = q_2) \dots (a.2.14)$$

$$\Delta U_{2i} = v_2(q_{2\bar{i}}) \cdot \Delta q_{2i}, (q_{2\bar{i}} \in [q_{2i-1}, q_{2i}], (i=1, \dots, n)) \dots (a.2.15)$$

ここで、極限值 (a.2.16) が存在することを仮定する。極限值 (a.2.16) の右辺には、第 2 導体の静電的ポテンシャルエネルギーの差を記述している。極限值 (a.2.16) の左辺の極限值を記述するのに使用した (a.2.17) はリーマン和である。(a.2.16) の左辺に記述した  $\lambda_2$  は、リーマン和 (a.2.17) を記述している区間  $[q_{2i-1}, q_{2i}]$  の長さ (a.2.14) の中で最大の長さのものとする。第 2 導体の (a.2.15) を使用して、リーマン和 (a.2.17) を記述する。

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_2(q_{2\bar{i}}) \cdot \Delta q_{2i} = U_2(q_2) - U_2(q_{20}) \dots (a.2.16)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta U_{2i} = \sum_{i=1}^n v_2(q_{2\bar{i}}) \cdot \Delta q_{2i} \dots (a.2.17) \text{ リーマン和}$$

リーマン和 (a.2.17) を使用した極限值 (a.2.16) は、積分として (a.2.18) で記述できる。電気量を 0 から  $q_2$  になるまで第 2 導体に与える場合の静電的ポテンシャルエネルギーは積分 (a.2.18) で記述できる。(a.2.18) の右辺の第一項は第 1 導体に与えた電気量  $q_1$  と第 2 導体に与えた電気量  $q_2$  との影響で生じた静電的ポテンシャルエネルギーである。(a.2.18) の右辺の第二項は第 2 導体に与えた電気量  $q_2$  の影響で生じた第 2 導体の静電的ポテンシャルエネルギーである。一般に積分 (a.2.18) の静電的ポテンシャルエネルギーは電位 (a.2.13) の閉区間  $[0, q_2]$  上の原始関数として扱うものとの判断は、経験からの著者の考えである。

$$U_2 = \int_0^{q_2} dU = \int_0^{q_2} v_2 \cdot dq_2 = \int_0^{q_2} a_{21} q_1 \cdot dq_2 + \int_0^{q_2} a_{22} q_2 \cdot dq_2 = a_{21} \cdot q_1 \cdot q_2 + \frac{1}{2} a_{22} \cdot q_2^2 \dots (a.2.18)$$

第 1 導体および第 2 導体に電気量を与えた次には第 3 導体に電気量  $q_3$  を与える。この場合には (a.2.19) で第 3 導体の電位を記述する。(a.2.19) の右辺の第一項は電気量  $q_1$  を持った第 1 導体の影響で生じた第 3 導体の電位である。(a.2.19) の右辺の第二項は電気量  $q_2$  を持った第 2 導体の影響で生じた第 3 導体の電位である。(a.2.19) の右辺の第三項は電気量  $q_3$  を持った第 3 導体で生じた第 3 導体の電位である。

$$v_3 = a_{31} \cdot q_1 + a_{32} \cdot q_2 + a_{33} \cdot q_3 \dots (a.2.19)$$

第 3 導体の電位を (a.2.19) で記述できる場合に、その第 3 導体に電気量 (a.2.20) を与える。この第 3 導体に電気量 (a.2.20) を与えた場合の第 3 導体の静電的ポテンシャルエネルギーは近似の計算として (a.2.21) で記述できるものとする。この場合は、(a.2.21) で近似の計算としての第 3 導体の静電的ポテンシャルエネルギーを記述できるものとする。近似の計算としての静電的ポテンシャルエネルギーとなる (a.2.21) では、近似の計算としての右辺の電位が第 3 導体に生じていることになる。

$$\Delta q_{3i} = q_{3i} - q_{3i-1}, (0 = q_{30} < \dots < q_{3i} < \dots < q_{3n} = q_3) \dots (a.2.20)$$

$$\Delta U_{3i} = v_3(q_{3\bar{i}}) \cdot \Delta q_{3i}, (q_{3\bar{i}} \in [q_{3i-1}, q_{3i}], (i=1, \dots, n)) \dots (a.2.21)$$

ここで、極限值 (a.2.22) が存在することを仮定する。極限值 (a.2.22) の右辺には、第 3 導体の静電的ポテンシャルエネルギーの差を記述している。極限值 (a.2.22) の左辺の極限值を記述するのに使用した (a.2.23) はリーマン和と呼ばれるものである。(a.2.22) の左辺に記述した  $\lambda_3$  は、リーマン和 (a.2.23) を記述している区間  $[q_{3i-1}, q_{3i}]$  の長さ (a.2.20) の中で最大の長さのものとする。第 3 導体の (a.2.21) を使用して、リーマン和 (a.2.23) を記述している。

$$\lim_{\lambda_3 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_3(q_{3\bar{i}}) \cdot \Delta q_{3i} = U_3(q_3) - U_3(q_{30}) \dots (a.2.22)$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta U_{3i} = \sum_{i=1}^n v_3(q_{3\bar{i}}) \cdot \Delta q_{3i} \cdots (\text{a.2.23}) \text{ リーマン和}$$

リーマン和 (a.2.23) を使用した極限值 (a.2.22) は、積分として (a.2.24) で記述できる。電気量を 0 から  $q_3$  になるまで第 3 導体に与える場合の静電的ポテンシャルエネルギーは積分 (a.2.24) で記述できる。(a.2.24) の右辺の第一項は第 1 導体に与えた電気量  $q_1$  と第 3 導体に与えた電気量  $q_3$  との影響で生じた静電的ポテンシャルエネルギーである。(a.2.24) の右辺の第二項は第 2 導体に与えた電気量  $q_2$  と第 3 導体に与えた電気量  $q_3$  との影響で生じた第 3 導体の静電的ポテンシャルエネルギーである。(a.2.24) の右辺の第三項は第 3 導体に与えた電気量  $q_3$  の影響で生じた第 3 導体の静電的ポテンシャルエネルギーである。一般に積分 (a.2.24) の静電的ポテンシャルエネルギーは電位 (a.2.19) の閉区間  $[0, q_3]$  上の原始関数として扱うものとの判断は、経験からの著者の考えである。

$$U_3 = \int_0^{q_3} dU = \int_0^{q_3} v_3 \cdot dq_3 = \int_0^{q_3} a_{31} q_1 \cdot dq_3 + \int_0^{q_3} a_{32} q_2 \cdot dq_3 + \int_0^{q_3} a_{33} q_3 \cdot dq_3 = a_{31} \cdot q_1 q_3 + a_{32} \cdot q_2 q_3 + \frac{1}{2} a_{33} \cdot q_3^2 \cdots (\text{a.2.24})$$

第 1 導体から第  $n-1$  導体までに電気量を与えた後、最後に第  $n$  導体に  $q_n$  を与える。(a.2.25) の右辺の第一項から第  $n-1$  項までは第 1 導体から第  $n-1$  導体までに与えた電気量の影響で第  $n$  導体に生じた電位である。

(a.2.25) の右辺の第  $n$  項は第  $n$  導体に与えた電気量  $q_n$  から生じた第  $n$  導体の電位である。

$$v_n = a_{n1} \cdot q_1 + a_{n2} \cdot q_2 + a_{n3} \cdot q_3 + a_{n4} \cdot q_4 + a_{n5} \cdot q_5 + \cdots + a_{nn-1} q_{n-1} + a_{nn} \cdot q_n \cdots (\text{a.2.25})$$

第  $n$  導体の電位を (a.2.25) で記述できる場合に、その第  $n$  導体に電気量 (a.2.26) を与える。この第  $n$  導体に電気量 (a.2.26) を与えた場合の静電的ポテンシャルエネルギーは近似の計算として (a.2.27) で記述できるものとする。この場合は、(a.2.27) で近似の計算としての第  $n$  導体の静電的ポテンシャルエネルギーを記述できるものとする。近似の計算としての静電的ポテンシャルエネルギーとなる (a.2.27) では、近似の計算としての右辺の電位が第  $n$  導体に生じていることになる。

$$\Delta q_{ni} = q_{ni} - q_{ni-1}, (0 = q_{n0} < \cdots < q_{ni} < \cdots < q_{nn} = q_n) \cdots (\text{a.2.26})$$

$$\Delta U_{ni} = v_n(q_{n\bar{i}}) \cdot \Delta q_{ni}, (q_{n\bar{i}} \in [q_{ni-1}, q_{ni}], (i=1, \cdots, n)) \cdots (\text{a.2.27})$$

ここで、極限值 (a.2.28) が存在することを仮定する。極限值 (a.2.28) の右辺には、第  $n$  導体の静電的ポテンシャルエネルギーの差を記述している。極限值 (a.2.28) の左辺の極限值を記述するのに使用した (a.2.29) はリーマン和と呼ばれるものである。(a.2.28) の左辺に記述した  $\lambda_n$  は、リーマン和 (a.2.29) を記述している区間  $[q_{ni-1}, q_{ni}]$  の長さ (a.2.26) の中で最大の長さのものとする。第  $n$  導体の (a.2.27) を使用して、リーマン和 (a.2.29) を記述している。

$$\lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_n(q_{n\bar{i}}) \cdot \Delta q_{ni} = U_n(q_n) - U(q_{n0}) \cdots (\text{a.2.28})$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta U_{ni} = \sum_{i=1}^n v_n(q_{n\bar{i}}) \cdot \Delta q_{ni} \cdots (\text{a.2.29}) \text{ リーマン和}$$

リーマン和 (a.2.29) を使用した極限值 (a.2.28) は、積分として (a.2.30) で記述できる。電気量を 0 から  $q_n$  になるまで第  $n$  導体に与える場合の静電的ポテンシャルエネルギーは積分 (a.2.30) で記述できる。(a.2.30) は第  $n$  導体に電気量  $q_n$  まで電気量を与えた場合の第  $n$  導体の静電的ポテンシャルエネルギーである。一般に積分 (a.2.30) の静電的ポテンシャルエネルギーは電位 (a.2.25) の閉区間  $[0, q_n]$  上の原始関数として扱うものとの判断は、経験からの著者の考えである。

$$\begin{aligned}
U_n &= \int_0^{q_n} dU = \int_0^{q_n} v_n \cdot dq_n = \int_0^{q_n} a_{n1} q_1 \cdot dq_n + \int_0^{q_n} a_{n2} q_2 \cdot dq_n + \int_0^{q_n} a_{n3} q_3 \cdot dq_n + \int_0^{q_n} a_{n4} q_4 \cdot dq_n + \int_0^{q_n} a_{n5} q_5 \cdot dq_n \\
&+ \cdots + \int_0^{q_n} a_{nn-1} q_{n-1} \cdot dq_n + \int_0^{q_n} a_{nm} q_n \cdot dq_n = a_{n1} \cdot q_1 \cdot q_n + a_{n2} \cdot q_2 \cdot q_n + a_{n3} \cdot q_3 \cdot q_n + a_{n4} \cdot q_4 \cdot q_n + a_{n5} \cdot q_5 \cdot q_n + \cdots \\
&+ a_{nn-1} q_{n-1} \cdot q_n + \frac{1}{2} a_{nm} \cdot q_n^2 \cdots \text{(a.2.30)}
\end{aligned}$$

(a.2.7) ~ (a.2.30) のように各導体の静電的ポテンシャルエネルギーを記述して, (a.2.31) のようにそれらの総和を計算する.  $n$  個の各導体の静電的ポテンシャルエネルギーの総和は, それら  $n$  個の導体で構成している導体系の静電的ポテンシャルエネルギーである.

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{i=1}^n U_i = \frac{1}{2} a_{11} \cdot q_1^2 + \left( a_{21} \cdot q_1 \cdot q_2 + \frac{1}{2} a_{22} \cdot q_2^2 \right) + \left( a_{31} \cdot q_1 \cdot q_3 + a_{32} \cdot q_2 \cdot q_3 + \frac{1}{2} a_{33} \cdot q_3^2 \right) + \\
&\cdots + \left( a_{n1} \cdot q_1 \cdot q_n + a_{n2} \cdot q_2 \cdot q_n + a_{n3} \cdot q_3 \cdot q_n + a_{n4} \cdot q_4 \cdot q_n + a_{n5} \cdot q_5 \cdot q_n + \cdots + a_{nn-1} \cdot q_{n-1} \cdot q_n + \frac{1}{2} a_{nm} \cdot q_n^2 \right) \cdots \text{(a.2.31)}
\end{aligned}$$

(a.2.31) は (a.2.32) で記述できる. ただし, (a.2.32) の右辺では (a.2.33) が成立する. (a.2.33) では (a.2.34) が成立することは (a.2.6) と同様である.

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \frac{1}{2} u \cdots \text{(a.2.32)}$$

$$\begin{aligned}
u &= a_{11} \cdot q_1^2 + 2a_{21} \cdot q_1 \cdot q_2 + a_{22} \cdot q_2^2 + 2a_{31} \cdot q_1 \cdot q_3 + 2a_{32} \cdot q_2 \cdot q_3 + a_{33} \cdot q_3^2 + \cdots + 2a_{n1} \cdot q_1 \cdot q_n + 2a_{n2} \cdot q_2 \cdot q_n + 2a_{n3} \cdot q_3 \cdot q_n \\
&+ 2a_{n4} \cdot q_4 \cdot q_n + 2a_{n5} \cdot q_5 \cdot q_n + \cdots + 2a_{nn-1} \cdot q_{n-1} \cdot q_n + a_{nm} \cdot q_n^2 \cdots \text{(a.2.33)}
\end{aligned}$$

$$a_{ij} = a_{ji} \cdots \text{(a.2.34)}$$

(a.2.33) を (a.2.35) のように整理する. (a.2.35) の括弧の中は (a.2.6) で記述している各導体の電位になる.

(a.2.35) の各括弧の中を (a.2.6) の各式の左辺の電位で記述すると (a.2.36) になる. (a.2.36) を (a.2.32) の右辺に記述すると (a.2.37) になる.

$$\begin{aligned}
u &= (a_{11} \cdot q_1 + a_{12} \cdot q_2 + a_{13} \cdot q_3 + a_{14} \cdot q_4 + a_{15} \cdot q_5 + \cdots + a_{1n} \cdot q_n) \cdot q_1 + (a_{21} \cdot q_1 + a_{22} \cdot q_2 + a_{23} \cdot q_3 + a_{24} \cdot q_4 + a_{25} \cdot q_5 + \cdots + a_{2n} \cdot q_n) \cdot q_2 + \\
&(a_{31} \cdot q_1 + a_{32} \cdot q_2 + a_{33} \cdot q_3 + a_{34} \cdot q_4 + a_{35} \cdot q_5 + \cdots + a_{3n} \cdot q_n) \cdot q_3 + \cdots + (a_{n1} \cdot q_1 + a_{n2} \cdot q_2 + a_{n3} \cdot q_3 + a_{n4} \cdot q_4 + a_{n5} \cdot q_5 + \cdots + a_{nm} \cdot q_n) \cdot q_n \cdots \text{(a.2.35)}
\end{aligned}$$

$$u = v_1 \cdot q_1 + v_2 \cdot q_2 + v_3 \cdot q_3 + \cdots + v_n \cdot q_n \cdots \text{(a.2.36)}$$

$$U = \frac{1}{2} u = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i v_i \cdots \text{(a.2.37)}$$

### iii. 線形素子 (linear element) としてのコンデンサについて

電気回路論での線形素子の計算をコンデンサについて行う. (a.3.1) を示す素子を仮定する. (a.3.1) の左辺は電流であり, 右辺の関数を記述している独立変数  $v$  を電位差——電圧とも呼ぶ.——とする.

$$i = f(v) \cdots \text{(a.3.1)}$$

(a.3.2) は定数とする. (a.3.3) のように (a.3.1) の変数に代入すると (a.3.4) の関係が成立する場合を仮定する. (a.3.1) の右辺の関数の独立変数に (a.3.5) の右辺を代入すると (a.3.6) になる. (a.3.6) が (a.3.7) になることを仮定する.

$$a = \text{const} \cdots \text{(a.3.2)}$$

$$i = f(a \times v) \cdots \text{(a.3.3)}$$

$$i = f(a \times v) = a \times f(v) \cdots \text{(a.3.4)}$$

$$v = v_1 + v_2 \cdots \text{(a.3.5)}$$

$$i = f(v_1 + v_2) \cdots \text{(a.3.6)}$$

$$i = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \cdots (a.3.7)$$

この (a.3.4) および (a.3.7) が成立する場合の素子は線形素子と呼ばれる。(a.3.4) および (a.3.7) をまとめて記述すると (a.3.8) になる。(a.3.8) では (a.3.9) の定数を仮定している。

$$i = f(a \times v_1 + b \times v_2) = a \times f(v_1) + b \times f(v_2) \cdots (a.3.8)$$

$$b = \text{const.} \cdots (a.3.9)$$

(a.3.10) を示す素子を仮定する。素子 (a.3.10) の電位差と電流の関係が (a.3.11) になる場合も線形素子と呼ばれる。

$$v = g(i) \cdots (a.3.10)$$

$$v = g(a \times i_1 + b \times i_2) = a \times g(i_1) + b \times g(i_2) \cdots (a.3.11)$$

(a.3.12) でコンデンサを定義する。(a.3.12) の分母は電位差である。(a.3.12) の分子は電気量である。(a.3.12) の左辺は時点 (a.3.13) を独立変数とする関数である。(a.3.12) の左辺の関数には定義区間がある。(a.3.12) の左辺のコンデンサはその定義区間内で使用する。ここでは、以下の計算は (a.3.12) の左辺での関数の定義区間内での計算であるものとする。

$$c(t) \equiv \frac{q_1(t)}{v_1(t)}, (v_1(t) \neq 0) \cdots (a.3.12) \text{コンデンサ}$$

$$t \cdots (a.3.13) \text{時点}$$

(a.3.12) を使用して (a.3.14) を記述する。(a.3.14) の両辺を時間で微分すると (a.3.15) になる。(a.3.15) の左辺を (a.3.16) とする。(a.3.16) の左辺は電流を意味する。

$$q(t) = c(t) \cdot v(t) \cdots (a.3.14)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = c(t) \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot v \cdots (a.3.15)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \cdots (a.3.16) \text{電流}$$

(a.3.17) のように (a.3.15) の右辺を記述する。(a.3.17) の電位差に定数 (a.3.2) を掛けて (a.3.18) のように代入する。(a.3.18) は (a.3.19) に記述できる。

$$f(v) = c(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot v(t) \cdots (a.3.17)$$

$$f(a \times v) = c(t) \cdot \frac{d(a \times v)}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot (a \times v) = a \times c(t) \frac{dv(t)}{dt} + a \times \frac{dc(t)}{dt} \cdot v(t) \cdots (a.3.18)$$

$$f(a \times v) = a \times f(v) \cdots (a.3.19)$$

(a.3.20) のように電位差を (a.3.17) に代入すると (a.3.21) で記述できる。(a.3.19) および (a.3.21) が成立することで、(a.3.22) が成立する。コンデンサ (a.3.12) は線形素子である。

$$f(v_1 + v_2) = c(t) \cdot \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot (v_1 + v_2) = \left( c(t) \cdot \frac{dv_1}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot v_1 \right) + \left( c(t) \cdot \frac{dv_2}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot v_2 \right) \cdots (a.3.20)$$

$$f(v_1 + v_2) = \left( c(t) \cdot \frac{dv_1}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot v_1 \right) + \left( c(t) \cdot \frac{dv_2}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot v_2 \right) = f(v_1) + f(v_2) \cdots (a.3.21)$$

$$f(a \times v_1 + b \times v_2) = a \cdot \left( c(t) \cdot \frac{dv_1}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot v_1 \right) + b \cdot \left( c(t) \cdot \frac{dv_2}{dt} + \frac{dc(t)}{dt} \cdot v_2 \right) = a \cdot f(v_1) + b \cdot f(v_2) \cdots (a.3.22)$$

(a.3.12) が (a.3.23) のように定数であるものと仮定する。(a.3.23) が成立すると (a.3.24) が成立する。(a.3.24)

を使用すると (a.3.17) は (a.3.25) になる. (a.3.25) の右辺を (a.3.26) に記述する.

$$c(t) = \text{const} \dots (\text{a.3.23})$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = 0 \dots (\text{a.3.24})$$

$$\frac{dq}{dt} = c(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \dots (\text{a.3.25})$$

$$f(v) = c(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \dots (\text{a.3.26})$$

(a.3.26) の電位差の変数に定数 (a.3.2) を掛けて (a.3.27) のように代入する. また, (a.3.26) の電位差に (a.3.28) のように代入する. (a.3.27) および (a.3.28) が成立することから (a.3.29) が成立する. (a.3.29) で, コンデンサ (a.3.23) が線形素子であることになる.

$$f(a \times v) = c(t) \cdot \frac{d(a \times v)}{dt} = a \times c(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} = a \times f(v) \dots (\text{a.3.27})$$

$$f(v_1 + v_2) = c(t) \cdot \frac{d(v_1(t) + v_2(t))}{dt} = c(t) \cdot \frac{dv_1(t)}{dt} + c(t) \cdot \frac{dv_2(t)}{dt} = f(v_1) + f(v_2) \dots (\text{a.3.28})$$

$$f(a \times v_1 + b \times v_2) = a \cdot c(t) \cdot \frac{dv_1(t)}{dt} + b \cdot c(t) \cdot \frac{dv_2(t)}{dt} = a \cdot f(v_1) + b \cdot f(v_2) \dots (\text{a.3.29})$$

#### iv. マクスウェルの方程式系 (Maxwell's Equations) について

(a.4.1) ~ (a.4.4) をマクスウェルの方程式系——これらの方程式は微分形である.——と呼ぶ. ただし, (a.4.5) および (a.4.6) を前提とする. (a.4.1) ~ (a.4.3) までは既に前回——本書の第3回——での付録で簡単な説明をした. 本書の第5回ではマクスウェルの方程式系を使用して, 電流, 磁場および誘導起電力などを説明する. 特に, 磁場および誘導起電力ではマクスウェルの方程式系の (a.4.2) および (a.4.4) で記述できる箇所を使用する. (a.4.4) は電磁波を説明するのに重要な式であり, 本書の Option——文献12のこと.——で具体的に使用する. (a.4.4) では磁場および電流密度の関係を知らることができる. (a.4.4) の左辺の  $\mathbf{H}$  は‘磁場の強さ’あるいは‘磁場’と呼ばれる. 磁場と磁束密度は (a.4.6) の関係になる. (a.4.4) の右辺の第一項は電流密度である. (a.4.4) の右辺の第二項は変位電流の密度である. (a.4.7) は透磁率——permeability——である. 多くの本で, (a.4.4) の右辺の第二項はマクスウェルが仮定して与えたものであることを紹介している<sup>2)</sup>.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \dots (\text{a.4.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \dots (\text{a.4.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \dots (\text{a.4.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \dots (\text{a.4.4})$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \times \mathbf{E} \dots (\text{a.4.5})$$

$$\mathbf{B} = \mu \times \mathbf{H} \dots (\text{a.4.6})$$

$$\mu \dots (\text{a.4.7})$$

(a.4.1) ~ (a.4.4) の電場と磁束密度は (a.4.7) および (a.4.8) で記述できる. (a.4.7) の電場はスカラーポテンシャル (a.4.9) およびベクトルポテンシャル (a.4.10) と呼ばれるもので記述できる. (a.4.8) の磁場はベクトルポテンシャル (a.4.10) で記述できる. (a.4.7) および (a.4.8) は本書の第3回の付録で既に導出した.

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \dots (\text{a.4.7})$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \dots (\text{a.4.8})$$

$$\phi \dots (\text{a.4.9})$$

$$\mathbf{A} \dots (\text{a.4.10})$$

## 参考文献

- 1) ROBERT RESNICK, DAVID HALLIDAY, KENNETH S. KRANE, 1992: PHYSICS 4th Edition Volume2, John Wiley & Sons, Inc., pp.655-658, pp.662-663.
- 2) 金原寿郎編：『基礎物理学 下巻』, (豪華房, 1988年), pp.29-40, p.153.
- 3) 電気学会大学講座編：『電気回路論』, (電気学会, 1993), p.4.
- 4) [富岡和人, "AL COM.CVSyst.1 on Dec. 27, 2006", 循環系に関する研究報告, \(2006-12-27\)](#)
- 5) [富岡和人, "循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第一回"](#)
- 6) [富岡和人, "循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第二回"](#)
- 7) [富岡和人, "循環系の回路モデルの簡単な初級講座 2007 第三回"](#)
- 8) [富岡和人, "電位の簡単な入門 2007 第一回"](#)
- 9) [富岡和人, "電位の簡単な入門 2007 第二回"](#)
- 10) [富岡和人, "電位の簡単な入門 2007 第三回"](#)
- 11) [富岡和人, "電位の簡単な入門 2007 第五回"](#)
- 12) [富岡和人, "電位の簡単な入門 2007Option"](#)
- 13) Vladimir A.Zorich, Roger Cooke(Translator), 2004: Mathematical Analysis I, Springer, p.56, pp.113-114, pp.138-139, pp.178-180, pp.329-330, pp.331-332.
- 14) 福田安蔵, 鈴木七緒, 安岡善則, 黒崎千代子：『詳解 微分積分演習II』, (共立出版, 1982), p.140.
- 15) [富岡和人, "特殊相対性理論の速度の変換", pp.63-64.](#)
- 16) [富岡和人, "AL COM.CVSyst.2 on Dec. 25, 2008", 循環系に関する研究報告, \(2008-12-25\)](#)

## 免責事項

A LIFE COM.および外部の情報提供者は、ユーザーに対しこの Web サイトの内容について何ら保証するものではありません。ユーザーが A LIFE COM.の Web サイトを利用したことにより被った損失・損害、その他 A LIFE COM. の Web サイトに関連して被った損失・損害について、A LIFE COM. および外部の情報提供者は、一切責任を負いません。

本資料は情報提供を目的として作成したものです。本資料の真偽に対しては、著者、A LIFE COM.および A LIFE COM.のバイオ研究室は一切の責任を負いません。

## 著作権

Copyright © 2007–2009 富岡和人 All rights reserved.

文書のプロパティの文書に関する制限の概要の表示内容については著者の許可のないものとします。

本ドキュメントのバックアップのコピーは許可します。

本ドキュメントを私的利用の範囲内で印刷することは許可します。

電位の簡単な入門 2007 第4回 とみおかかずひと 富岡和人著

作成日：2007年04月26日

発行日：2007年04月27日

改訂発行日：2007年05月24日

改訂発行日：2007年10月11日

改訂発行日：2007年11月09日

改訂発行日：2007年11月09日

改訂発行日：2008年05月19日

改訂発行日：2008年07月04日

改訂発行日：2008年07月04日

改訂発行日：2008年08月24日

改訂発行日：2009年08月19日

改訂発行日：2009年12月23日

ホームページ

<http://www.alifecom.info/>

<http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/>

<http://book.geocities.jp/alifecominfo/>

<http://alifecominfo.aikotoba.jp/>

電気の回路のページ

[http://www.alifecom.info/circuit\\_analysis.htm](http://www.alifecom.info/circuit_analysis.htm)

[http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/circuit\\_analysis.htm](http://www7b.biglobe.ne.jp/~alifecom/circuit_analysis.htm)

[http://book.geocities.jp/alifecominfo/circuit\\_analysis.htm](http://book.geocities.jp/alifecominfo/circuit_analysis.htm)

[http://alifecominfo.aikotoba.jp/circuit\\_analysis.htm](http://alifecominfo.aikotoba.jp/circuit_analysis.htm)