

# AL\_COM.CVSystem.2

on Dec. 25, 2008

心臓-血管系の時変型集中定数回路モデル

——血流量の定義の研究 1——

A LIFE COM. バイオ研究室

富岡和人

### 免責事項

A LIFE COM.および外部の情報提供者は、ユーザーに対しこの Web サイトの内容について何ら保証するものではありません。ユーザーがA LIFE COM.の Web サイトを利用したことにより被った損失・損害、その他A LIFE COM. の Web サイトに関連して被った損失・損害について、A LIFE COM. および外部の情報提供者は、一切責任を負いません。

本論文は情報提供を目的として作成したものです。本論文の真偽に対しては、著者、A LIFE COM.およびA LIFE COM.のバイオ研究室は一切の責任を負いません。

A LIFE COM.

# 心臓-血管系の時変型集中定数回路モデル

## ——血流量の定義の研究 1——

富岡和人

A LIFE COM. バイオ研究室

〒321-0216 栃木県下都賀郡壬生町壬生丁 2 2 9 - 2 0

TEL : 0282-82-6505

e-mail : [alifecom@s45.xrea.com](mailto:alifecom@s45.xrea.com)

### 著者抄録

著者が独自に構築した循環系の回路モデル理論に与えた血流量の定義を、本論文では改定した。その改定した血流量の定義を与える際に、正味の血液量と呼ぶ量を導入した。

血流量および正味の血液量を使用して、生体内で流れている血液の運動およびエネルギーを考察する。その考察では、ニュートンの運動方程式、系のエネルギー保存則および熱力学の第 1 法則を使用する。そして、循環系の回路モデル理論のコンプライアンス、流れの抵抗およびインダクタンスについての血液の運動およびエネルギーを考察する。インダクタンスは本論文で著者が独自に定義したものである。そのインダクタンスでは、基礎的な回路素子としての特性について考察した。力学的な考察では、インダクタンスで血流路の直交断面積および血液の加速度の影響を記述できることを示した。

著者が独自に定義した血流量を使用して、血流量-断面率と呼ぶ量を定義した。その血流量-断面率の考察では、仕事率について簡単な考察を与えた。

キーワード 血流・血液・ニュートンの運動方程式・系のエネルギー保存則・熱力学の第 1 法則・コンプライアンス・流れの抵抗・インダクタンス・仕事率・血流速度

# The time varying lumped circuit model of the cardiovascular system.

—Research on the definition of blood flow1—

KAZUHITO TOMIOKA

A LIFE COM. Bio Room

229-20 Mibutei Mibumachi Simotsugagun Tochigi 321-0216 JAPAN

TEL : 0282-82-6505

e-mail : [alifecom@s45.xrea.com](mailto:alifecom@s45.xrea.com)

## Abstract

I defined the blood flow of the theory of the time varying lumped circuit model of the cardiovascular system by myself. I revise the definition of blood flow in this paper. I introduce a quantity I call the net blood volume for the revision.

I discuss motion and energy of blood which flows around your body in view of blood volume and net blood volume. I use Newton's equation of motion , conservation of energy in a system of particles and the first law of thermodynamics for the discussion and I discuss motion and energy of blood on compliance , flow resistance and inductance of the theory of the time varying lumped circuit model of the cardiovascular system. The inductance is a quantity I define by myself in this paper. I discuss characteristics of the inductance which I regard as a circuit element. The inductance has a close relation to orthogonal sectional areas of passages and acceleration of blood.

I define a quantity I call the rate of blood\_flow\_sectional\_area. I have simple discussion on the rate of blood\_flow\_sectional\_area and mechanical power.

Keywords blood flow · cardiovascular system · Newton's equation of motion · conservation of energy in a system of particles · the first law of thermodynamics · compliance · flow resistance · inductance · acceleration · mechanical power · blood flow velocity

## 目次

目次.....	5
1. まえがき.....	6
2. 血流量の定義.....	6
2.1. 正味の血液量および血流量.....	6
2.2. 血流量で記述する正味の血液量.....	7
2.3. 心室, 心房および血管内に存在する血液量.....	7
2.4. 正味の血液量の符号.....	8
3. 考察.....	10
3.1. コンプライアンスの定義で使用する血液量.....	14
3.2. 流れの抵抗で使用する血流量.....	18
3.3. 電気回路でのインダクタンスおよび循環系の回路モデルでの血流量についての考察.....	19
3.4. 血流量-断面積率の定義.....	25
4. あとがき.....	26
参考文献.....	27
文献2) および文献3) の改訂発行したPDF文書へのハイパーリンク.....	27
付録.....	27

## 1. まえがき

本論文は著者が独自に構築した循環系の回路モデル<sup>1)</sup>で使用する血流量の定義を論じたものである。著者が独自に構築した循環系の回路モデル理論では、循環系の回路モデルを電気の回路にみなして回路方程式を記述する。循環系の回路モデルの血流量を、その電気の回路の電流にみなして計算する。本論文では、その電流の定義は著者が独自に定義した電流の定義<sup>2)</sup>を使用する。その電流の定義は、著者が導入した微分法論<sup>3)</sup>を使用して与えたものである。

2章では血流量の定義を与える。その血流量の定義を与える際に、正味の血流量と呼ぶ量を導入する。2章で与える血流量の定義は、文献1で与えた血流量の定義の不足な部分であるものと著者が考えた箇所を補ったものである。3章では、血液の運動およびエネルギーをニュートンの運動方程式、系のエネルギー保存則および熱力学の第1法則を使用して考察した。3章1節では、コンプライアンスで表す血流路内の血液の容積、内圧、運動およびエネルギーについて考察した。3章2節では、流れの抵抗で表す血流路内の血流量、内圧差、血液の運動およびエネルギーについて考察した。3章3節では、インダクタンスを著者が独自に定義した。そして、回路素子としてのインダクタンスについて考察した。その考察では、インダクタンスの単位、計算式およびコンプライアンスと流れの抵抗に接続した場合の特性について論じた。そこで論じた圧力差およびエネルギーの特性が流れの抵抗とは異なることを説明した。3章4節では、血流量-断面率と呼ぶ量を定義した。その血流量-断面率の考察では、仕事率について簡単に説明した。

## 2. 血流量の定義

2章では、血流量を定義するために幾つかの言葉を約束する。本論文では、‘血流’は‘血液の流れ’を意味する。‘血流路’は‘血液の流れる路’を意味する。特に、血流路には心室、心房および血管内などを含め意味するものとする。

## 2.1. 正味の血流量および血流量

血流路に血流を仮定する。この血流の血流量の移動方向に対する直交断面積を考える。その直交断面積は幾つかの直交断面積に分割できるものとする。そして、それぞれの直交断面積に於ける血流路を考える。このような幾つかの直交断面積に次のような正味の血流量および血流量を考える。著者の経験では、図 2.1.1 のように血流の血液の移動方向をたびたび考えることがある。

時点 $t$ を独立変数とする血流量の関数を (2.1.1) とする。

血液量の移動方向に対する直交断面積

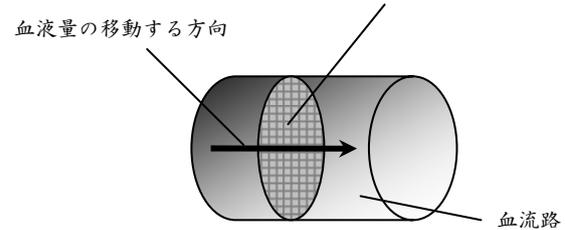


図 2.1.1 血流量の定義

血流量 (2.1.1) および (2.1.1) の時点 (2.1.2) は実数とする。(2.1.1) は血流路の或る直交断面積を或る時間内——時の長さのことである。——に通過した正味の血流量とする。この正味の血流量は或る血流量に於ける正味の血流量である。この正味の血流量は、上述の直交断面積ごとに与えるものである。幾つかの直交断面積に分割された、元の直交断面積では、それぞれの直交断面積で与える或る血流量に於ける正味の血流量を考慮することができるものとする。

(2.1.1) は連続な関数であるものと仮定する。

$$q(t), (t \in E) \dots (2.1.1)$$

$$t \dots (2.1.2)$$

正味の血流量 (2.1.1) の微分係数 (2.1.3) を、或る血流路の或る直交断面積を通過した正味の血流量に於ける血流量であるものと定義する。血流量 (2.1.3) の右辺では、時間 (2.1.4) が変数である。時点 (2.1.2) は正味の血流量の関数 (2.1.1) の定義区間内の固定されたひとつの点として扱うものとする。

$$q'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(t+h) - q(t)}{h}, (t, t+h \in E) \dots (2.1.3)$$

$$h \dots (2.1.4)$$

正味の血流量の微分を (2.1.5) で定義する。時間 (2.1.4) を使用して、時点 (2.1.2) の微分を (2.1.6) で定義する。時間の微分 (2.1.6) を正味の血流量の微分 (2.1.5) の右辺に代入すると (2.1.7) を記述できる。

$$dq(t) \equiv q'(t) \cdot h \dots (2.1.5)$$

$$dt \equiv h \dots (2.1.6)$$

$$dq(t) = q'(t) \cdot dt \dots (2.1.7)$$

時間 (2.1.8) が成立するならば、正味の血流量の微分 (2.1.7) から血流量 (2.1.9) を記述できる。一般には、(2.1.10) の左辺のように血流量を記述して、血流量 (2.1.11) を記述できる。

$$dt \neq 0 \dots (2.1.8)$$

$$q'(t) = \frac{dq(t)}{dt}, (dt \neq 0) \dots (2.1.9)$$

$$i(t) = q'(t) \dots (2.1.10)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, (dt \neq 0) \dots (2.1.11)$$

**2.2. 血流量で記述する正味の血液量**

区間 (2.2.1) では血流量である関数 (2.2.2) が定義されているものとする. 血流量 (2.2.2) の右辺の  $q(t)$  は正味の血液量である. 血流量 (2.2.2) は区間 (2.2.1) では連続な関数であるものとする.

$$[a, b] \dots (2.2.1)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \dots (2.2.2)$$

血流量 (2.2.2) を使用して, 血流量 (2.2.2) の右辺に記述した正味の血液量  $q(t)$  を (2.2.3) で記述できる. 正味の血液量 (2.2.3) の右辺の第 2 項の定数は (2.2.4) を満足する. ただし, 積分 (2.2.3) の左辺の独立変数は区間 (2.2.1) の任意の数とする.

$$q(t) = \int_a^t i(x) dx + C, (x, t \in [a, b], C = \text{const.}) \dots (2.2.3)$$

$$C = q(a) \dots (2.2.4)$$

正味の血流量 (2.2.3) の右辺の第 1 項の積分は関数 (2.2.5) として記述できる. 関数 (2.2.5) は積分 (2.2.5) の積分区間で示す時間内に流れた血流量 (2.2.2) に於ける正味の血液量である.

$$q_s(t) = \int_a^t i(x) dx, (x, t \in E) \dots (2.2.5)$$

**2.3. 心室, 心房および血管内に存在する血液量**

(2.3.1) を血流路に流入する血流量とする. (2.3.2) を血流路内に於ける正味の血液量の微分係数となる血流量とする. (2.3.3) を血流路から流出する血流量とする.

$$i_{input}(t) \dots (2.3.1)$$

$$i_{netblood}(t) \dots (2.3.2)$$

$$i_{output}(t) \dots (2.3.3)$$

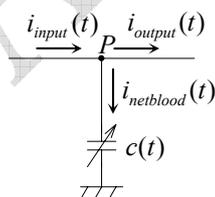


図 2.3.1 コンプライアンスに流入する血流量

図 2.3.1 で, その血流路の点 P に流入する血流量の向きを正の向きに仮定する. そして, 電気回路論のキルヒホッフの第 1 法則を使用すると (2.3.4) を記述できる.

$$i_{input}(t) - i_{netblood}(t) - i_{output}(t) = 0 \dots (2.3.4)$$

(2.3.4) を使用して, その血流路内に存在する血液量を記述する. (2.3.4) から (2.3.5) を記述できる.

$$i_{netblood}(t) = i_{input}(t) - i_{output}(t) \dots (2.3.5)$$

正味の血液量 (2.2.3) を使用して, (2.3.6) を記述できる.

(2.3.6) は (2.3.5) の左辺の血流量に於ける正味の血液量である. ただし, (2.3.6) の右辺の第 2 項は, 時点 (2.2.7) までに, その血流量の直交断面積を通過した正味の血液量であるものとする.

$$q_{netblood}(t) = \int_a^t i_{netblood}(x) dx + q_{netblood}(a) \dots (2.3.6)$$

$$t = a \dots (2.2.7)$$

血液量 (2.3.6) の右辺の第 1 項に血流量 (2.3.5) の右辺を代入すると (2.3.8) を記述できる. 線形結合である (2.3.5) は (2.3.9) のように積分が可能である.

$$q_{netblood}(t) = \int_a^t (i_{input}(x) - i_{output}(x)) dx + q_{netblood}(a) \dots (2.3.8)$$

$$q_{netblood}(t) = \int_a^t i_{input}(x) dx - \int_a^t i_{output}(x) dx + q_{netblood}(a) \dots (2.3.9)$$

積分 (2.3.9) の右辺の第 1 項に記述した正味の血液量を (2.3.10) で記述する. さらに, 積分 (2.3.9) の右辺の第 2 項に記述した正味の血液量を (2.3.11) で記述する.

(2.3.10) の積分区間で示す時間内に血流路に流入する血流量 (2.3.1) の正味の血液量が (2.3.10) である. (2.3.11) の積分区間で示す時間内に血流路から流出する血流量 (2.3.3) の正味の血液量が (2.3.11) である.

$$q_{\delta input}(t) = \int_a^t i_{input}(x) dx \dots (2.3.10)$$

$$q_{\delta output}(t) = \int_a^t i_{output}(x) dx \dots (2.3.11)$$

正味の血液量である (2.3.10) および (2.3.11) を血液量 (2.3.9) の右辺に代入すると, その血流路内に存在する血液量 (2.3.12) を記述できる. (2.3.12) では, 正味の血液量 (2.2.3) はコンプライアンスで表した血流路内の増加した分の血液量 (2.3.12) に記述できる場合があることを意味する.

$$q_{netblood}(t) = q_{\delta input}(t) - q_{\delta output}(t) + q_{netblood}(a) \dots (2.3.12)$$

図 2.3.2 で, その血流路の点 P に流入する血流量の向きを正の向きに仮定する. (2.3.4) ではなく (2.3.13) が成立する場合で, 図 2.3.2 のコンプライアンスで表した血流路内の減少分の血液量を記述する. (2.3.13) から (2.3.14) を記

述できる.

$$i_{input}(t) + i_{netblood}(t) - i_{output}(t) = 0 \dots (2.3.13)$$

$$i_{netblood}(t) = i_{output}(t) - i_{input}(t) \dots (2.3.14)$$

正味の血液量 (2.2.3) を使用して, (2.3.14) に於ける正味の血液量 (2.3.15) を記述する. 血液量 (2.3.15) の右辺の第 1 項に (2.3.14) の右辺を代入すると, (2.3.16) を記述できる.

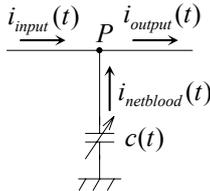


図 2.3.2 コンプライアンスから流出する血流量

$$q(t) = \int_a^t i_{netblood}(x) dx + q(a) \dots (2.3.15)$$

$$q_{netblood}(t) = \int_a^t (i_{output}(x) - i_{input}(x)) dx + q_{netblood}(a) \dots (2.3.16)$$

線形結合である (2.3.14) は (2.3.17) のように積分できる.

ここで, (2.3.10) および (2.3.11) と同様に正味の血液量の記号を使用して, (2.3.17) の右辺の第 1 項および第 2 項を書き換えると (2.3.18) を記述できる. (2.3.18) では, 正味の血液量 (2.2.3) は血流路内の減少した分の血液量 (2.3.18) に記述できる場合を示している. ただし, (2.3.12) および (2.3.18) では (2.3.19) の場合も考えられる.

$$q_{netblood}(t) = \int_a^t i_{output}(x) dx - \int_a^t i_{input}(x) dx + q_{netblood}(a) \dots (2.3.17)$$

$$q_{netblood}(t) = q_{\delta output}(t) - q_{\delta input}(t) + q_{netblood}(a) \dots (2.3.18)$$

$$q_{netblood}(a) = 0 \dots (2.3.19)$$

血流路内から血液が流入あるいは流出し始めるときの血流路内の血液量を (2.3.20) とする. ここでは, その血流路の血液量が増減した場合を考えている. 血液量の増加については, その増加分の血液量 (2.3.12) を血流路内に存在した血液量 (2.3.20) に加えることで, その血流路内に存在する血液量 (2.3.21) を記述できる. 血液量の減少については, その減少分の血液量 (2.3.18) を血流路内に存在した血液量 (2.3.20) から引くことで, その血流路内に存在する血液量 (2.3.22) を記述できる.

$$q_a \dots (2.3.20)$$

$$q_a + q_{netblood}(t) = q_a + (q_{\delta output}(t) - q_{\delta input}(t) + q_{netblood}(a)) \dots (2.3.21)$$

$$q_a - q_{netblood}(t) = q_a - (q_{\delta output}(t) - q_{\delta input}(t) + q_{netblood}(a)) \dots (2.3.22)$$

血液が増加する場合の血流路内に存在する血液量 (2.3.21) の両辺を微分すると, (2.3.23) になる. その血流路内の血液が増加する場合であるので (2.3.23) の符号は (2.3.24) のように正になる.

$$\frac{dq_{netblood}(t)}{dt} = \frac{dq_{\delta input}(t)}{dt} - \frac{dq_{\delta output}(t)}{dt} \dots (2.3.23)$$

$$\frac{dq_{netblood}(t)}{dt} = \frac{dq_{\delta input}(t)}{dt} - \frac{dq_{\delta output}(t)}{dt} > 0 \dots (2.3.24)$$

一方, 血液量が減少する場合の血流路内に存在する血液量 (2.3.22) の両辺を微分すると, (2.3.25) になる. 血流路内の血液量が減少する場合であるので (2.3.25) の符号は (2.3.26) のように負になる. (2.3.25) の右辺を整理すると (2.3.27) になる. (2.3.27) の等式の右辺は (2.3.24) の等式の右辺とは記述が同じであるが, 符号は互いに異符号である.

$$-\frac{dq_{netblood}(t)}{dt} = -\left(\frac{dq_{\delta output}(t)}{dt} - \frac{dq_{\delta input}(t)}{dt}\right) \dots (2.3.25)$$

$$-\frac{dq_{netblood}(t)}{dt} = -\left(\frac{dq_{\delta output}(t)}{dt} - \frac{dq_{\delta input}(t)}{dt}\right) < 0 \dots (2.3.26)$$

$$-\frac{dq_{netblood}(t)}{dt} = \frac{dq_{\delta input}(t)}{dt} - \frac{dq_{\delta output}(t)}{dt} < 0 \dots (2.3.27)$$

図 2.3.1 のコンプライアンス内にある血液量を (2.3.28) で記述する. 一方, 図 2.3.2 のコンプライアンス内にある血液量を (2.3.29) で記述する.

$$q(t) = q_a + q_{netblood}(t) \dots (2.3.28)$$

$$q(t) = q_a - q_{netblood}(t) \dots (2.3.29)$$

図 2.3.1 のコンプライアンス内では血液量が増加する. この解釈では, コンプライアンス内の血液量 (2.3.28) の時間に対する変化率は血液量 (2.3.2) の正の値に等しくなるので (2.3.30) になる. 図 2.3.2 のコンプライアンス内では血液量が減少する. この解釈では, コンプライアンス内の血液量 (2.3.29) の時間に対する変化率は血液量 (2.3.2) の正の値とは異符号であるので (2.3.31) になる.

$$i_{netblood}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq_{netblood}(t)}{dt} \dots (2.3.30)$$

$$i_{netblood}(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{dq_{netblood}(t)}{dt} \dots (2.3.31)$$

#### 2.4. 正味の血液量の符号

血液量 (2.2.2) を記述している正味の血液量 (2.2.3) の

符号は正の値だけでなく、負の値にもなることを示す。血液量を体積として考え、0以上の実数値の値を与えることが著者の経験でも普通である。本報告書で与えた正味の血液量は、単位は容積となるが符号は正および負の両方を使用することになる。このために、正味の血液量は体積ではないことは明らかである。

血流量 (2.2.2) が正の実数値になる場合を (2.4.1) で仮定する。血流量 (2.4.1) を使用すると、正味の血液量 (2.2.5) から (2.4.2) を記述できる。正味の血液量 (2.4.2) は0以上の実数値である。正味の血液量 (2.4.2) を使用すると、正味の血液量 (2.2.3) から (2.4.3) を記述できる。正味の血液量 (2.4.3) の符号は右辺の第2項の定数となる正味の血液量 (2.2.4) で決定する。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \geq 0 \dots (2.4.1)$$

$$q_s(t) = \int_a^t i(x) dx \geq 0 \dots (2.4.2)$$

$$q(t) = \int_a^t i(x) dx + q(a), (i(t) \geq 0) \dots (2.4.3)$$

血流量 (2.2.2) が負の実数値になる場合を (2.4.4) で仮定する。血流量 (2.4.4) を使用すると、正味の血液量 (2.2.5) から (2.4.5) を記述できる。正味の血液量 (2.4.5) は0以下の実数値である。正味の血液量 (2.4.5) を使用すると、正味の血液量 (2.2.3) から (2.4.6) を記述できる。正味の血液量 (2.4.6) の符号は右辺の第2項の定数となる正味の血液量 (2.2.4) で決定する。血流量 (2.4.4) は正味の血液量 (2.4.6) の減少を意味する。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \leq 0 \dots (2.4.4)$$

$$q_s(t) = \int_a^t i(x) dx \leq 0 \dots (2.4.5)$$

$$q(t) = \int_a^t i(x) dx + q(a), (i(t) \leq 0) \dots (2.4.6)$$

血流量 (2.4.1) および (2.4.4) に於ける正味の血液量 (2.4.3) および (2.4.6) は血流路Rに考えた直交断面積Sを或る時間内に通過した正味の血液量の総和である。血流路Rに2つの方向 $L_+$ および $L_-$ を仮定すると、その血流路Rのひとつの方向 $L_+$ を血流量 $i_1(t)$ の正の方向に仮定することになる。2つの方向 $L_+$ および $L_-$ は互いに逆向きであるものとする。その正の方向 $L_+$ に流れる血液量から、血流量 (2.4.7)

に於ける直交断面積Sを通過した正味の血液量の総和 $q_1(t)$  (2.4.8) を仮定する。この総和 $q_1(t)$ は正味の血液量の総和であり正の符号をもつことを示す。

$$i_1(t) = \frac{dq_1(t)}{dt} \geq 0, (t \in [a, t_2]) \dots (2.4.7)$$

$$q_1(t) = \int_a^t i_1(x) dx + q_1(a), (x \in [a, t_2]) \dots (2.4.8)$$

正味の血液量 (2.2.3) は、血流量が (2.4.4) のように負の値になる関数の場合には、直交断面積Sを通過した正味の血液量 (2.2.3) は減少することを意味する。血流量 $i_1(t)$ が正になる方向を、その血流路Rのひとつの方向 $L_+$ に仮定している。同じ直交断面積Sに於いて、その方向 $L_+$ とは逆の方向 $L_-$ に流れる血液の血流量 (2.4.9) を仮定する。血流量 (2.4.7) および血流量 (2.4.9) は (2.4.10) の関係になる。血流量 (2.4.9) に於ける正味の血液量 $q_2(t)$  (2.4.11) を仮定する。その正味の血液量で与える血流量 $i_2(t)$ の正の方向 $L_-$ は、最初に仮定した血流量 $i_1(t)$ の正の方向 $L_+$ とは逆向きになる。

$$i_2(t) = \frac{dq_2(t)}{dt} \geq 0, (t \in [t_2, b], a < t_2) \dots (2.4.9)$$

$$i_2(t_2) = i_1(t_2) \dots (2.4.10)$$

$$q_2(t) = \int_{t_2}^t i_2(x) dx + q_2(t_2), (x, t \in [t_2, b], a < t_2) \dots (2.4.11)$$

最初に仮定した血流量 $i_1(t)$  (2.4.7) と次に仮定した血流量 $i_2(t)$  (2.4.9) をひとつの関数 $i_{blood}(t)$  (2.4.12) で記述することを考える。この場合では、最初に仮定した血流量である関数 $i_1(t)$  (2.4.7) の0以外の値を $i_{blood}(t)$  (2.4.12) の正の値に対応させることにする。そして、次に仮定した血流量である関数 $i_2(t)$  (2.4.9) の0以外の値を $i_{blood}(t)$  (2.4.12) の負の値に対応させることにする。このようにして与えた関数 $i_{blood}(t)$  (2.4.12) となる血流量では(2.4.1) および(2.4.4) を満足する。このとき、 $i_{blood}(t)$  (2.4.12) の負の値の方向 $L_-$ に移動する血液量は、直交断面積Sを通過した正味の血液量の総和での減少分の正味の血液量として扱うことになる。

$$i_{blood}(t) = \begin{cases} \frac{dq_1(t)}{dt}, (t \in [a, t_2]) \\ -\frac{dq_2(t)}{dt}, (t \in [t_2, b]) \end{cases} \dots (2.4.12)$$

(2.4.10) を使用すると、 $i_{blood}(t)$  (2.4.12) では (2.4.13) を満足する。(2.4.13) では (2.4.14) を仮定する。 $i_{blood}(t)$  (2.4.12) の左辺を (2.4.15) の右辺で記述する。(2.1.15)

の左辺を積分 (2.4.16) の積分区間内で連続な関数として仮定する. 関数 (2.4.16) の左辺は  $i_{blood}(t)$  (2.4.15) に於ける正味の血液量である.

$$\frac{dq_1(t_2)}{dt} - \frac{dq_2(t_2)}{dt} = 0 \dots (2.4.13)$$

$$\frac{dq_1(t_2)}{dt} = 0 \dots (2.4.14)$$

$$i_{blood}(t) = \frac{dq_{blood}(t)}{dt}, (t \in [a, b]) \dots (2.4.15)$$

$$q_{blood}(t) = \int_a^t i_{blood}(x) dx + q_{blood}(a), (x, t \in [a, b]) \dots (2.4.16)$$

### 3. 考察

質量 (3.1) の血液を仮定する. そして, 質量 (3.1) の質点を仮定する. その質点に作用する力の合力が零である場合は, ニュートンの運動方程式から, その質点に生じる加速度の大きさは零であるものと扱うことができる. ここでは, この質点には圧力差から生じる力が作用して, その質点には加速度が生じているものと仮定する. そして, 次のような考察をする.

質点の速度の  $x$  軸方向の向きには力 (3.2) が作用しているものとする. (3.3) は力 (3.2) で与える圧力である. 質点の速度の  $x$  軸方向の向きとは逆向きに力 (3.4) が作用しているものとする. (3.5) は力 (3.4) で与える圧力である.

$$m \dots (3.1)$$

$$p_1(t) \times S(t) \dots (3.2)$$

$$p_1(t) \dots (3.3)$$

$$p_2(t) \times S(t) \dots (3.4)$$

$$p_2(t) \dots (3.5)$$

(3.6) は力 (3.2) および (3.4) に対する直交断面積の面積ベクトルである. この直交断面積は質点で表した物体に力が作用しているものと仮定している重心を含む直交断面積である.

$$S(t) \dots (3.6)$$

力 (3.7) は質点の速度の方向とは逆向きに作用する力である. (3.7) のような力は重力, 粘性力, 粘性抵抗, 慣性抵抗 およびその他の力などで考えることができる.

$$f(t) \dots (3.7)$$

この質点にはニュートンの運動方程式 (3.8) が成立するものと仮定する. 運動方程式 (3.8) の右辺には, 質点の加速度 (3.9) を記述している.

$$(p_1(t) - p_2(t)) \times S(t) + f(t) = m \times a(t) \dots (3.8)$$

$$a(t) \dots (3.9)$$

運動方程式 (3.8) の  $x$  軸方向の方程式は (3.10) で記述する. 運動方程式 (3.8) の  $y$  軸方向の方程式は (3.11) で記述する.

$$(p_1(t) - p_2(t)) \times S(t) + f_x(t) = m \times a_x(t) \dots (3.10)$$

$$f_y(t) = m \times a_y(t) \dots (3.11)$$

(3.10) から  $x$  軸方向の加速度ベクトルの成分を (3.12) で記述できる. (3.11) から  $y$  軸方向の加速度ベクトルを (3.13) で記述できる.

$$a_x(t) = \frac{(p_1(t) - p_2(t)) \times S(t) + f_x(t)}{m}, (m \neq 0) \dots (3.12)$$

$$a_y(t) = \frac{f_y(t)}{m}, (m \neq 0) \dots (3.13)$$

一方, 質量 (3.1) の質点の速度ベクトルを (3.14) で記述する. 速度ベクトル (3.14) の速さを (3.15) で記述する. 速度ベクトル (3.14) の  $x$  成分を (3.16) で記述する. 速度ベクトル (3.14) の  $y$  成分を (3.17) で記述する. ただし, 角度 (3.18) は速度ベクトル (3.14) と  $x$  軸とのなす角度であるものとする. (3.15), (3.16) および (3.17) は有限値になるものとする.

$$v(t) = v_x(t) \mathbf{i} + v_y(t) \mathbf{k} \dots (3.14)$$

$$v(t) = |v(t)| \dots (3.15)$$

$$v_x(t) = v(t) \cdot \cos \theta \dots (3.16)$$

$$v_y(t) = v(t) \cdot \sin \theta \dots (3.17)$$

$$\theta \dots (3.18)$$

加速度ベクトル (3.9) および速度ベクトル (3.14) の関係は (3.19) で記述できる. (3.19) から速度ベクトル (3.14) は (3.20) で記述できる.

$$v(t) - v_1(t_1) = \int_{t_1}^t a(\tau) d\tau \dots (3.19)$$

$$v(t) = \int_{t_1}^t a(\tau) d\tau + v_1(t_1) \dots (3.20)$$

速度 (3.20) が (3.21) になる場合には (3.22) を記述できる. (3.22) の左辺の積分区間は (3.23) を満足するものとする.

$$v(t_{\text{stop}}) = \int_{t_1}^{t_{\text{stop}}} a(\tau) d\tau + v_1(t_1) = \mathbf{0} \dots (3.21)$$

$$\int_{t_1}^{t_{\text{stop}}} a(\tau) d\tau = -v_1(t_1) \dots (3.22)$$

$$t_1 \leq t_{\text{stop}} \leq t_2 \dots (3.23)$$

(3.22) の x 軸方向の成分は (3.24) で記述できる. (3.22) の y 軸方向の成分は (3.25) で記述できる.

$$\int_{t_1}^{t_{\text{stop}}} a_x(\tau) d\tau = -v_x(t_1) \dots (3.24)$$

$$\int_{t_1}^{t_{\text{stop}}} a_y(\tau) d\tau = -v_y(t_1) \dots (3.25)$$

(3.26) および (3.27) を仮定すると, (3.24) および (3.25) から (3.28) および (3.29) を記述できる. (3.28) および (3.29) では, 加速度ベクトルの各成分の向きは速度ベクトルの各成分の向きとは異符号になる. 速度 (3.20) が (3.21) になるまでに, 減速の加速度 (3.28) および (3.29) が生じて, (3.24) および (3.25) が成立することで, (3.21) になるものと考えることができる.

$$v_x(t_1) = v(t_1) \cdot \cos \theta > 0 \dots (3.26)$$

$$v_y(t_1) = v(t_1) \cdot \sin \theta > 0 \dots (3.27)$$

$$a_x(t) < 0 \dots (3.28)$$

$$a_y(t) < 0 \dots (3.29)$$

(3.28), (3.29) および (3.30) が成立する場合は加速度ベクトルの x 成分 (3.12) および加速度ベクトルの y 成分 (3.13) から (3.31) および (3.32) が成立する. ただし, (3.31) は力 (3.7) の x 成分の符号を示す. (3.32) は力 (3.7) の y 成分の符号を示す.

$$p_1(t) - p_2(t) > 0 \dots (3.30)$$

$$f_x(t) < 0 \dots (3.31)$$

$$f_y(t) < 0 \dots (3.32)$$

(3.20) で, 減速の加速度が質点に生じていることを仮定する. ここで, (3.33) が成立するならば, (3.12), (3.13), (3.28) および (3.29) から (3.34) および (3.35) が記述できる.

$$p_1(t) = p_2(t) \dots (3.33)$$

$$a_x(t) = \frac{f_x(t)}{m} < 0, (m \neq 0) \dots (3.34)$$

$$a_y(t) = \frac{f_y(t)}{m} < 0, (m \neq 0) \dots (3.35)$$

減速の加速度 (3.34) および (3.35) を使用すると, 速度ベクトル (3.20) の x 軸および y 軸の成分を (3.36) および (3.37) で記述できる. (3.36) および (3.37) から (3.21) が成立する場合も記述可能である.

$$v_x(t) = \int_{t_1}^t \frac{f_x(\tau)}{m} d\tau + v_x(t_1) \dots (3.36)$$

$$v_y(t) = \int_{t_1}^t \frac{f_y(\tau)}{m} d\tau + v_y(t_1) \dots (3.37)$$

力 (3.7) は質点が移動することで生じる力であるならば, (3.21) が成立すると, その質点には力 (3.7) が作用しないものと解釈できる. 力 (3.7) が作用しないならば, (3.38) を記述できる. (3.38) を使用すると, 加速度のベクトルの成分 (3.34) および (3.35) から (3.39) および (3.40) が記述できる.

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{0} \dots (3.38)$$

$$a_x(t) = 0, (m \neq 0) \dots (3.39)$$

$$a_y(t) = 0, (m \neq 0) \dots (3.40)$$

(3.39) および (3.40) が成立すると, 加速度 (3.41) が成立することになる. 加速度ベクトル (3.41) を速度ベクトル (3.20) に代入すると (3.42) を記述できる. 加速度がゼロの質点の速度ベクトル (3.42) は等速度運動を示す.

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}, (m \neq 0) \dots (3.41)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_1(t_1), (t \neq t_1) \dots (3.42)$$

血流が生じていることを仮定する. その血流の血液はひとつの直交断面積をもつことができるものとする. その直交断面積を幾つかの直交断面積に分割できるものとする. そのような幾つかの直交断面積のひとつを (3.43) とする. 直交断面積 (3.43) は血流の血液量の移動方向に対して直交しているものである.

$$S_{bf}(t) \dots (3.43)$$

質量 (3.1) の物質を血液として扱うものと仮定する. その質量 (3.1) の血液は速度ベクトル (3.14) で移動しているものと扱うことができる. その血液の移動を血流として考えることができる. その血流の速度ベクトルの x 軸成分を

(3.16) で記述できる. この x 軸方向の速度ベクトルに直交する断面積を (3.44) として扱うものとする. (3.44) の面積ベクトルを (3.45) で記述する. 面積ベクトル (3.45) の大きさは (3.44) であり, 向きは x 軸方向であるものとする.

$$S_b(t) \dots (3.44)$$

$$\mathbf{S}_b(t) \dots (3.45)$$

面積 (3.44) は質量 (3.1) の血液の x 軸に直交する断面積になる. この直交断面積 (3.44) は速度 (3.46) で移動していることになる. このことから, 質量 (3.1) の血液は x 軸方向には (3.46) で移動している. この血流の正の方向を (3.16) の符号に一致させるものとする. ここでは, 単位時間当たりに面積 (3.44) が移動するものとして与える体

積 (3.47) を、単位時間に通過する血液の体積として扱う。そして、直交断面積 (3.44) に流れた血流量 (2.1.3) として (3.48) を記述する。(3.16) を使用すると、血流量 (3.48) は (3.49) で記述できる。

$$v(t) \cos \theta \dots (3.46)$$

$$|S_b(t) \cdot v(t) \cos \theta| \dots (3.47)$$

$$i(t) = S_b(t) \cdot v(t) \cos \theta \dots (3.48)$$

$$i(t) = S_b(t) \cdot v_x(t) \dots (3.49)$$

(3.16) から (3.50) を記述できる。(3.49) および (3.50) を使用すると、血流量 (3.51) を記述できる。(3.12) を (3.51) の右辺の第 1 項に代入すると、(3.52) を記述できる。

$$v_x(t) = \int_{t_1}^t a_x(\tau) d\tau + v_{1x}(t_1) \dots (3.50)$$

$$i(t) = S_b(t) \cdot \int_{t_1}^t a_x(\tau) d\tau + S_b(t) \cdot v_{1x}(t_1) \dots (3.51)$$

$$i(t) = S_b(t) \cdot \int_{t_1}^t \frac{(p_1(\tau) - p_2(\tau)) \times S(\tau) + f_x(\tau)}{m} d\tau + S_b(t) \cdot v_x(t_1) \dots (3.52)$$

上述の計算では、血液を質量 (3.1) の質点として記述できる場合で考察した。次に、血液を血流路内に存在する質点系として考察する。ここでも、血流路には血流量 (2.1.3) を考慮する。そして、質点系として扱う血液に作用した外力の合力のなす仕事量 (3.53) を使用して、質点系のエネルギー保存則で血液のエネルギーについて考察する。仕事量 (3.53) の右辺は 3 つの項に区別してある。

$$W_{ex} = w_1 + w_2 + w_3 \dots (3.53)$$

仕事量 (3.53) の右辺の第 1 項および第 2 項は (3.54) および (3.55) で記述する。そして、(3.54) および (3.55) を巨視的な流体力学上の力のなす仕事量とする。上述までの計算では血液に作用する内圧 (3.3), (3.5) および力 (3.7) で記述できるものとする。ただし、(3.54) は 0 以上の実数になる仕事量である。(3.55) は 0 以下の実数になる仕事量である。仕事量が零になる場合は、考察する時点での仕事量の近傍に含まれる値の符号で区別するものとする。

$$w_1 = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t f_{1i}(\tau) \cdot v_{1i}(\tau) d\tau \geq 0 \dots (3.54)$$

$$w_2 = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t f_{2j}(\tau) \cdot v_{2j}(\tau) d\tau \leq 0 \dots (3.55)$$

仕事量 (3.53) の右辺の第 3 項は (3.56) を微視的な力のなす仕事量とする。この微視的な力は仕事量 (3.54) および

(3.55) で記述していない力で微視的な力を意味する。ここでは、伝導、対流、放射、衝突および振動などの力を含めて微視的な力を考えるものとする。

$$w_3 \dots (3.56)$$

仕事量 (3.53) では質点系のエネルギー保存則 (3.57) を記述できる。(3.57) の右辺の第 1 項 (3.58) は、系の運動エネルギーの差である。(3.57) の右辺の第 2 項 (3.59) は、系のポテンシャルエネルギーの差である。(3.57) の右辺の第 3 項 (3.60) は、系の内部エネルギーの差である。

$$W_{ex} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{internal} \dots (3.57)$$

$$\Delta K \dots (3.58)$$

$$\Delta U \dots (3.59)$$

$$\Delta E_{internal} \dots (3.60)$$

一般には仕事量 (3.56) では、内部エネルギーの増減を主に与えるものと著者は考える。仕事量 (3.56) を記述する力では、系の温度の変化を説明できる力を多く含むものと著者は考える。温度の変化を与える摩擦を説明する力は、(3.54) および (3.55) にも含まれるものと考えられる。流体力学上の巨視的な粘性力および流体の抵抗の力は血液を構成している物体の分子を振動させ、熱の移動から生じる内部エネルギーを考慮することができる。熱の伝導および電磁放射にも、熱の移動から生じる内部エネルギーを考慮することができる。

系の仕事量 (3.61) が成立する場合は、質点系とする血液のエネルギーが増加する。(3.61) では、血液の移動方向に作用する力のなす仕事量が血液の移動方向とは逆の方向に作用する力のなす仕事量よりも大きい値となる。ヒトの体の中では、心臓あるいは血管で血液に与えられる力の内圧の最大値が血液に作用し始めた時点には、(3.61) を満足する場合があるものと著者は解釈する。このことから、その内圧の最大値の時点では、その血液は系のエネルギーが増加している場合があるものと解釈できる。(3.61) から (3.62) を記述できる。(3.62) では、(3.54) および (3.56) の和は負の符号を付けた (3.55) よりも大きい。

$$W_{ex} = w_1 + w_2 + w_3 > 0 \dots (3.61)$$

$$w_1 + w_3 > -w_2 \dots (3.62)$$

系の仕事量 (3.63) が成立する場合は、質点系とする血液のエネルギーが減少する。(3.63) では、血液の移動方向に作用する力のなす仕事量が血液の移動方向とは逆の方向に作用する力のなす仕事量よりも小さい値となる。この系のエネルギーの減少では次のような考察をできる。

血管での内圧の最小値が作用する時点での血管の血液量は収縮期に比べて減少しているものと仮定する。この仮定では、血管内の血液量が減少していることで内径は、収縮期に比べて狭く成っているものと考えられる。このような血液量および内径から次のような仮定をする。その血流の方向に作用する力の大きさは、その力の大きさの範囲での最小値の近傍に含む値であるものと仮定する。さらに、その系として扱う血液に作用する収縮期に左心室から生じる内圧の力のみでは、その血液は右心房内に到達する血液になることは不可能であるものと仮定する。これらの仮定では、その血液に作用する力の仕事量 (3.63) を著者は考える。

(3.63) から (3.64) を記述できる。(3.64) では、(3.54) および (3.56) の和は負の符号を付けた (3.55) よりも小さい。

$$W_{ex} = w_1 + w_2 + w_3 < 0 \dots (3.63)$$

$$w_1 + w_3 < -w_2 \dots (3.64)$$

もし、仕事量 (3.53) を連続な関数であるものと仮定するならば、(3.65) は (3.61) および (3.63) の時点の間で生じるものと考えられる。(3.65) では (3.66) のように系のエネルギーが保存される。(3.66) から (3.67) を記述できる。(3.67) の右辺には系の内部エネルギーの差を記述している。内部エネルギー (3.60) は、血液を構成している細胞、分子および原子などの運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーで記述できるものと考えられる。このような運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーは、その系の温度の変化との関係を示すことも考えられる。

$$W_{ex} = w_1 + w_2 + w_3 = 0 \dots (3.65)$$

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{internal} = 0 \dots (3.66)$$

$$\Delta K + \Delta U = -\Delta E_{internal} \dots (3.67)$$

血液の熱が体の他の部位に移動することで、その血液の温度が下がることが考えられる。逆に、体の熱が血液に移動することで、その血液の温度が上がることを考えられる。温度差および熱の関係を熱量 (3.68) を使用して考える。

(3.68) では、血液の熱量は  $Q$  である。その系となる血液を構成している物質の個数を  $n$  とする。熱量 (3.68) では、それぞれの物質の質量  $m_j$ 、比熱  $c_{Qj}$  および温度変化を示す温度差  $\Delta T_j$  を記述している<sup>4)</sup>。

$$Q = \sum_{j=1}^n m_j \cdot c_{Qj} \cdot \Delta T_j \text{ JK}^{-1} \dots (3.68)$$

(3.69) は熱力学の第 1 法則の式である。(3.69) の右辺は、

系の平衡状態にある熱量および仕事量である。系の外部である環境が、その系になした仕事量 (3.70) である。ここでは、熱力学では、系の運動エネルギーの差 (3.58) および系のポテンシャルエネルギーの差 (3.59) は扱われていないものとする。そして、系の運動エネルギーの差 (3.71) および系のポテンシャルエネルギーの差 (3.72) を仮定する。このようなことから、熱力学の第 1 法則を使用する際には、系のエネルギー保存則 (3.57) の内部エネルギー (3.60) は (3.69) とは完全に等しいものとは 2008 年現在の著者には不明である。さらに、熱力学の第 1 法則を多くの物理学書では理想気体に対して使用している。本論文では、液体である血液を扱うことになる。分子の配列の特性でも、液体が気体とは異なる性質を示すので、気体での実験結果を液体に使用することは本論文では行わない。

$$\Delta E_{internal} = Q + w_Q \dots (3.69)$$

$$w_Q \dots (3.70)$$

$$\Delta U = 0 \dots (3.71)$$

$$\Delta K = 0 \dots (3.72)$$

しかし、ここでは血液を系として扱った系のエネルギー保存則 (3.57) の内部エネルギー (3.60) に熱力学の第 1 法則 (3.69) が成立することを仮定する<sup>5)</sup>。この仮定では、生体から系となる血液に伝導した熱  $Q$  が、その血液の内部エネルギーに変換されるものと解釈できる。血液の系の運動エネルギーの差 (3.58) および系のポテンシャルエネルギーの差 (3.59) が内部エネルギーの差 (3.60) に変換されない場合でも、生体内では生体から血液に熱が伝導することが認められる。この場合では、(3.73) が成立するならば、その系の血液の内部エネルギーを増加させることを示す。逆に、生体内の血液から生体に熱が伝導する場合は、その系となる血液の内部エネルギーが減少することを (3.73) は示す。

$$\Delta E_{internal} = Q, (w_Q = 0) \dots (3.73)$$

熱量 (3.68) および内部エネルギー (3.73) を使用して、系として扱う血液の温度変化で生じた温度差が十分に小さいならば (3.67) の左辺の値も小さいものと著者は考える。

左心室の収縮期に大動脈弁から出てくる血液は (3.61) のように系のエネルギーが増加しているものと考えられる。この時点での血液は、左心室内に等容収縮期でほとんど停止状態になっているものとする。このとき、系の運動エネルギーの増加が大きく生じているものとする。そして、その血液が大動脈弁から上昇するならば系のポテンシャルエ

エネルギーは増加しているものと扱える。逆に、大動脈弁から下降するならば系のポテンシャルエネルギーは減少するものと扱える。この後に、系のエネルギーは (3.63) のように減少するものと考えられるが、(3.53) が連続な関数ならば (3.66) のように系のエネルギーが保存される時点が存在するものと扱える。起立位および座位では、上行大動脈から動脈に向かって血液の位置は下降する時間がある。その時間では、系のポテンシャルエネルギーは減少する。ここで、その減少した系のポテンシャルエネルギーはほとんど系の運動エネルギーに変換されて、系の運動エネルギーが増加するものとする。このような系のエネルギーの変化が生じる際には、(3.61) から (3.63) に符号が変化する過程で、(3.53) が連続な関数ならば (3.66) が成立するものと考えられる。この議論のように系のポテンシャルエネルギーから系の運動エネルギーに変換される場合には (3.67) の右辺は小さいものと考えられる。

上述の考察とは逆に、静脈から右心房に血液が向かう過程では系の運動エネルギーのほとんどが系のポテンシャルエネルギーに変換される時間があるものとする。この場合では、(3.63) のように系のエネルギーが減少することが考えられる。静脈の筋ポンプで血液が右心房のほうへ押し上げられる時点では、系の運動エネルギーも増加する。この時点では、系のエネルギーが (3.61) のように増加しているものと考え、その系の内部エネルギーが減少していても (3.61) のように増加する程度に小さいものと扱える。そして、このように系のエネルギーが減少から増加することで、その符号が変わる過程には (3.53) が連続な関数ならば (3.66) のように系のエネルギーが保存されるものと扱える。

系のポテンシャルエネルギーの差が零 (3.71) になる場合で (3.53) を考察する。(3.61) で系のエネルギーが増加する場合には (3.74) を記述できる。(3.74) から (3.75) に記述できる。(3.75) では、(3.75) の右辺に記述した量——負の符号を含める。——が、系の運動エネルギーの変化量よりも小さいものと扱うことができる。(3.75) を満足する部位では、水平方向に血液が移動していることが考えられる。水平方向にある血管内では、血液の速さを増加させるには血管壁で血液に力を作用させる方法がある。この場合では、系として扱う血液の運動エネルギーは増加するものと扱える。この系の運動エネルギーの増加量は (3.75) の右辺の量よりも大きいことを (3.75) は示している。

$$\Delta K + \Delta E_{\text{internal}} > 0 \dots (3.74)$$

$$\Delta K > -\Delta E_{\text{internal}} \dots (3.75)$$

系のエネルギーの変化量が正の値から零になる場合では (3.76) を記述できる。(3.76) から (3.77) を記述できる。(3.77) では系の運動エネルギーの変化量は系の内部エネルギーの変化量とは異符号であることを示している。(3.77) での系の運動エネルギーの符号は正負の両方をとることが考えられる。

$$\Delta K + \Delta E_{\text{internal}} = 0 \dots (3.76)$$

$$\Delta K = -\Delta E_{\text{internal}} \dots (3.77)$$

系のエネルギーの変化量が零から負の値になる場合では (3.78) を記述できる。(3.78) から (3.79) を記述できる。(3.79) では、(3.79) の右辺に記述した量——負の符号を含める。——は系の運動エネルギーの変化量よりも大きいものと扱うことができる。(3.71) を満足する部位では、水平方向に血液が移動していることが考えられる。血液の速さが減少するならば、運動エネルギーは減少する。(3.79) では、その運動エネルギーの減少量よりも右辺は大きいことを示す。血流の進行方向の力が血液に作用しないならば、その血液には減速の加速度が生じていることが考えられる。このようなことは、血管内で生じていることは認められるものと著者は考える。

$$\Delta K + \Delta E_{\text{internal}} < 0 \dots (3.78)$$

$$\Delta K < -\Delta E_{\text{internal}} \dots (3.79)$$

### 3.1. コンプライアンスの定義で使用する血液量

3章1節では、血流量を使用して著者の定義した時変型コンプライアンス (3.1.1) を考察する。図 3.1.1 は、その時変型コンプライアンスである。(3.1.1) の分母は、血圧に大気圧を加算した内圧である。心室および心房の場合でも、同様に大気圧を加算したものを使用する。(3.1.1) の分子は、心室、心房あるいは血管の血液量である。

$$c(t) \equiv \frac{q(t)}{p(t)}, (p(t) \neq 0) \dots (3.1.1)$$

$$\neq c(t)$$

図 3.1.1 時変型コンプライアンス

(3.1.1) の分母の内圧は、そのコンプライアンスで表す血流路では内圧差は零であることを意味する。時変型コンプライアンスでは血液の状態までは定義していない。3章1節の最初では、3章の (3.8) を使用して、そのコンプライアンスで表す血流路内での血液の加速度および速度について

て考察する.

ニュートンの運動方程式 (3.8) から加速度の x 成分 (3.12) および y 成分 (3.13) を導出した. これらの成分で記述した加速度を使用して, 速度ベクトル (3.20) を記述した. これらの加速度および速度を使用して, その血流路内での血液の加速度および速度を考察する.

図 3.1.1 で表す血流路内では (3.33) を満足している. (3.33) を使用して, 加速度の x 成分 (3.34) および y 成分 (3.35) を導出できた. (3.34) および (3.35) では減速の加速度の成分を意味する. その血流路内の血液は減速しながら, その血流路内を移動することになる.

加速度の x 成分 (3.34) および y 成分 (3.35) を使用すると, 速度ベクトル (3.20) から速度の x 成分 (3.36) および y 成分 (3.37) を導出できた. この血液の速度ベクトルには, (3.36) および (3.37) の右辺の第 2 項に記述しているように定数である速度の項がある. このように減速の加速度が生じている血液は, その速さが減速するように移動する. もし, (3.24) および (3.25) を満足すれば, その血流路内で血液は停止することになる.

その血流路内で (3.38) が成立するならば, 加速度の x 成分 (3.34) および y 成分 (3.35) では 0 である加速度の x 成分 (3.39) および y 成分 (3.40) が成立した. (3.39) および (3.40) では, 加速度が生じていないことを意味する. (3.39) および (3.40) から零ベクトルである加速度ベクトル (3.41) を記述でき, (3.41) を (3.20) に代入すると, 等速度運動を示す (3.42) になった. (3.42) では, 定数を成分とする速度ベクトルを意味する.

(3.1.1) は (3.1.2) に記述できる. (3.1.2) の両辺を微分すると, 容積の時間に対する変化率 (3.1.3) になる. 心室の等容収縮期および等容弛緩期では, (3.1.4) を満足することを仮定する.

$$q(t) = c(t) \times p(t) \dots (3.1.2)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{dc(t)}{dt} \times p(t) + c(t) \times \frac{dp(t)}{dt} \dots (3.1.3)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = 0 \dots (3.1.4)$$

(3.1.4) を (3.1.3) の左辺に代入すると, (3.1.5) を記述できる. (3.1.5) で, (3.1.6) および (3.1.7) が成立することを仮定する.

$$0 = \frac{dc(t)}{dt} \times p(t) + c(t) \times \frac{dp(t)}{dt} \dots (3.1.5)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} \neq 0 \dots (3.1.6)$$

$$p(t) \neq 0 \dots (3.1.7)$$

(3.1.6) および (3.1.7) の仮定では, (3.1.5) から (3.1.8) を記述できる. (3.1.8) の左辺のコンプライアンスに (3.1.1) を代入すると, (3.1.9) を記述できる.

$$\frac{c(t)}{p(t)} = -\frac{\frac{dc(t)}{dt}}{\frac{dp(t)}{dt}} \dots (3.1.8)$$

$$\frac{q(t)}{(p(t))^2} = -\frac{\frac{dc(t)}{dt}}{\frac{dp(t)}{dt}} > 0 \dots (3.1.9)$$

(3.1.9) で, (3.1.10) が成立するならば (3.1.11) が成立する. 生理学書での左心室の等容収縮期の容積および内圧の特性では, (3.1.10) および (3.1.11) の関係は成立する箇所を認めることはできる. しかし, 左心室の収縮期の途中で, 必ず (3.1.6) が成立し続けることを生理学書で明記していないことは, 日本国内での著者の経験である.

$$\frac{dp(t)}{dt} > 0 \dots (3.1.10)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} < 0 \dots (3.1.11)$$

(3.1.9) で, (3.1.12) が成立するならば (3.1.13) が成立する. 生理学書での左心室の等容弛緩期の容積および内圧の特性では, (3.1.11) および (3.1.12) の関係は成立する箇所を認めることはできる.

$$\frac{dp(t)}{dt} < 0 \dots (3.1.12)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} > 0 \dots (3.1.13)$$

(3.1.3) から (3.1.14) を導出する. (3.1.14) を使用して, 血流路の容積およびコンプライアンスの時間に対する変化率の関係を考察する.

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{\frac{dq(t)}{dt} - \frac{dc(t)}{dt} \times p(t)}{c(t)}, (c(t) \neq 0) \dots (3.1.14)$$

(3.1.15) を仮定する. 日本国内の一般的な平地では, (3.1.15) から (3.1.16) を記述できる.

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{\frac{dq(t)}{dt} - \frac{dc(t)}{dt} \times p(t)}{c(t)} \geq 0 \dots (3.1.15)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} - \frac{dc(t)}{dt} \times p(t) \geq 0 \dots (3.1.16)$$

(3.1.16) を (3.1.17) に書き直す. (3.1.18) が成立するならば, (3.1.17) では (3.1.19) が成立する. コンプライアンス (3.1.1) は (3.1.1) の分子に記述した容積の波形に類似の波形になる. そして, 一般に (3.1.1) の波形は (3.1.1) の分子に記述した容積の波形に等しいものではない.

(3.1.15) および (3.1.18) が成立するならば, (3.1.19) が成立する.

$$\frac{dq(t)}{dt} \geq \frac{dc(t)}{dt} \times p(t) \dots (3.1.17)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} < 0 \dots (3.1.18)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} < 0 \dots (3.1.19)$$

同様に, (3.1.20) を仮定する. 日本国内の一般的な平地では, (3.1.20) から (3.1.21) を記述できる.

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{\frac{dq(t)}{dt} - \frac{dc(t)}{dt} \times p(t)}{c(t)} \leq 0 \dots (3.1.20)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} - \frac{dc(t)}{dt} \times p(t) \leq 0 \dots (3.1.21)$$

(3.1.21) を (3.1.22) に書き直す. (3.1.23) が成立するならば, (3.1.22) では (3.1.24) が成立する. (3.1.20) および (3.1.23) が成立するならば, (3.1.24) が成立する.

$$\frac{dq(t)}{dt} \leq \frac{dc(t)}{dt} \times p(t) \dots (3.1.22)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} > 0 \dots (3.1.23)$$

$$\frac{dc(t)}{dt} > 0 \dots (3.1.24)$$

時変型コンプライアンス (3.1.25) を与える. さらに, コンプライアンス (3.1.1) を使用して, 不等式 (3.1.26) が成立する場合を仮定する. 不等式 (3.1.26) の両辺に (3.1.1) および (3.1.25) を代入すると, (3.1.27) を記述できる. コンプライアンス (3.1.1) および (3.1.25) は, 容積および内圧で記述している. 一般には, 血流路内の血液の容積は血流になって, その血流路に到達したものである. この血

流量は血液の状態の影響を受けて, その値を変化させる. 内圧が, その血流路につながっている他の血流路の特性, 内圧および容積の影響を受けることは, 合力 (3.8) での内圧差, 直交断面積 (3.6) および力 (3.7) で考察できる. 特に, コンプライアンスで表す血流路で速度ベクトルの x 成分 (3.36) および y 成分 (3.37) が成立するならば, その血流路内での血液の運動量の変化からの力が生じることを説明できる. その血流路内の内圧には, その力の影響も現れているものと著者は考える. ニュートンの運動方程式 (3.8) の直交断面積 (3.6) は, その血液に仮定したものである. 血液を構成している物体の容積が熱膨張で膨れることを温度から説明できる. この熱膨張で, 直交断面積 (3.6) が大きくなることも考えられる. このことで, ニュートンの運動方程式 (3.8) の合力の値が変化する場合も説明できる. また, 熱膨張で血流路内の血液の容積も変化する場合も説明できる. さらに, 熱膨張は, その血流路を構成している物体にも考えることはできる. そして, 或る時点の血流路内の容積および内圧が, 次の時点での血流路内の容積および内圧の決定に影響を与えるものと著者は考える.

(3.1.27) は, このような容積および内圧で記述したコンプライアンスの関係式であるものと解釈できる. このことで, コンプライアンス (3.1.1) および (3.1.25) は, 熱膨張を含めて血流路を構成している物体, 容積および内圧からの影響を示しているものと説明できる.

$$c_0(t) = \frac{q_0(t)}{p_0(t)} \dots (3.1.25)$$

$$c(t) \geq c_0(t) \dots (3.1.26)$$

$$\frac{q(t)}{p(t)} \geq \frac{q_0(t)}{p_0(t)} \dots (3.1.27)$$

(3.1.27) を書き直して (3.1.28) を記述できる. (3.1.26) が成立する場合では, (3.1.28) のように容積の比および内圧の比の関係を満足するように血流量が決定することを説明している.

$$\frac{q(t)}{q_0(t)} \geq \frac{p(t)}{p_0(t)} \dots (3.1.28)$$

不等式 (3.1.29) が成立する場合を仮定する. 不等式 (3.1.29) の両辺に (3.1.1) および (3.1.25) を代入すると, (3.1.30) を記述できる.

$$c(t) \leq c_0(t) \dots (3.1.29)$$

$$\frac{q(t)}{p(t)} \leq \frac{q_0(t)}{p_0(t)} \dots (3.1.30)$$

(3.1.30) を書き直して (3.1.31) を記述できる. (3.1.29) が成立する場合には, (3.1.31) のように容積の比および内圧の比の関係を満足する.

$$\frac{q(t)}{q_0(t)} \leq \frac{p(t)}{p_0(t)} \dots (3.1.31)$$

(3.1.25) を使用して, (3.1.32) を考察する. (3.1.32) では図 3.1.1 の時変型コンプライアンスに (3.1.25) を使用したことになる. そして, 図 3.1.1 のコンプライアンスの容積を (3.1.32) の左辺にし, そのコンプライアンスの内圧を (3.1.33) の左辺としたものである. (3.1.33) の右辺のコンプライアンスに (3.1.25) を代入して, 整理したものを (3.1.34) とする.

$$q(t) = \alpha \times c_0(t) \times p(t), (0 < \alpha \in \mathbf{R}) \dots (3.1.32)$$

$$p(t) = \frac{q(t)}{\alpha \times c_0(t)} \dots (3.1.33)$$

$$p(t) = \frac{q(t)}{\alpha \times q_0(t)} \cdot p_0(t) \dots (3.1.34)$$

(3.1.35) を仮定する. (3.1.34) で (3.1.35) が成立するならば, (3.1.36) を満足する.

$$\frac{q(t)}{\alpha \cdot q_0(t)} \geq 1 \dots (3.1.35)$$

$$p(t) \geq p_0(t) \dots (3.1.36)$$

容積およびコンプライアンスを使用して, (3.1.36) の両辺を (3.1.37) のように記述する. そして, (3.1.38) および (3.1.39) を仮定する.

$$\frac{q(t)}{c(t)} \geq \frac{q_0(t)}{c_0(t)}, (c(t) \neq 0, c_0(t) \neq 0) \dots (3.1.37)$$

$$c(t) = \alpha \cdot c_0(t) \dots (3.1.38)$$

$$q(t) = \beta \cdot q_0(t), (0 < \beta \in \mathbf{R}) \dots (3.1.39)$$

(3.1.38) を (3.1.37) の左辺に代入すると, (3.1.40) を記述できる. 日本の一般的な平地でのコンプライアンス (3.1.25) では, (3.1.40) から (3.1.41) を記述できる.

$$\frac{q(t)}{\alpha \cdot c_0(t)} \geq \frac{q_0(t)}{c_0(t)} \dots (3.1.40)$$

$$q(t) \geq \alpha \cdot q_0(t) \dots (3.1.41)$$

(3.1.41) の左辺に (3.1.39) を代入すると, (3.1.42) を記述できる. (3.1.42) から (3.1.43) を導出できる. (3.1.34) で (3.1.35), (3.1.38) および (3.1.39) が成立するならば,

(3.1.43) が成立するように血流量が決定する.

$$\beta \cdot q_0(t) \geq \alpha \cdot q_0(t) \dots (3.1.42)$$

$$\beta \geq \alpha \dots (3.1.43)$$

(3.1.34) で (3.1.44) が成立するならば (3.1.45) を記述できる. (3.1.45) を, 容積およびコンプライアンスを使用して, (3.1.46) に書き直す.

$$\frac{q(t)}{\alpha \cdot q_0(t)} \leq 1 \dots (3.1.44)$$

$$p(t) \leq p_0(t) \dots (3.1.45)$$

$$\frac{q(t)}{c(t)} \leq \frac{q_0(t)}{c_0(t)} \dots (3.1.46)$$

(3.1.38) を (3.1.46) の左辺に代入すると, (3.1.47) になる. (3.1.47) から (3.1.48) を記述する. (3.1.39) を (3.1.48) の左辺に代入すると (3.1.49) を記述できる. (3.1.49) から (3.1.50) を導出できる. (3.1.34) で (3.1.44), (3.1.38) および (3.1.39) が成立するならば, (3.1.50) が成立するように血流量が決定する.

$$\frac{q(t)}{\alpha \cdot c_0(t)} \leq \frac{q_0(t)}{c_0(t)} \dots (3.1.47)$$

$$q(t) \leq \alpha \cdot q_0(t) \dots (3.1.48)$$

$$\beta \cdot q_0(t) \leq \alpha \cdot q_0(t) \dots (3.1.49)$$

$$\beta \leq \alpha \dots (3.1.50)$$

コンプライアンスで示す血液を系としたエネルギーについて考察する. コンプライアンスで示す領域では, 血液に作用する圧力は, そのコンプライアンスの内圧のみである. そのために, 血液に作用する内圧差は零になる. 一般的には, そのコンプライアンスの領域内の血液に外力が作用するならば, その外力の合力は血液の移動方向とは逆向きの力であるものと著者は考える. その血液の移動方向とは逆向きの外力の合力のなす仕事量は, 血液を系として扱う場合の仕事量で (3.63) のように負になる. (3.63) では, その系のエネルギーは減少する. 系である血液に作用する外力の合力が零ならば, 系のエネルギーは保存されて, 仕事量 (3.65) が成立する. ただし, コンプライアンスの領域外では, 他のコンプライアンスの内圧差で生じる外力が血液に作用する. 一般には, この外力のなす仕事量は, その血液の移動方向に外力が作用するので正の仕事量になるものと考えられる. 血液の移動方向に内圧差の外力を与えたのは, その方向の外力のコンプライアンスの内圧である. このことから, そのコンプライアンスが血液に正の仕事量を与えたものと解釈できる. そして, そのコンプライアンスの領域外では血液に作用する外力の合力のなす仕事量は (3.61), (3.63) あるいは (3.65) になる. (3.61) の場合

は、その系のエネルギーが増加することを既に論じた。

上述の議論では、熱の移動から説明する内部エネルギーの変化 (3.73) には触れなかった。もし、或る領域で熱が血液に移動した場合には、その血液の内部エネルギーは増加するものと考えられる。そして、その際には血液である系のエネルギーの変化量に変化を与えることは考えられる。

コンプライアンスではひとつの内圧の関数を与えて、そのコンプライアンスで示す領域の内圧として代表させている。このために、ひとつのコンプライアンスを模型とする血管は、そのひとつの内圧の近傍を適切に決定する必要がある。上述での系のエネルギーの考察が近似として成立するには、その系のエネルギーの議論が成立するようにコンプライアンスで示す領域を内圧の近傍を使用して決定する必要がある。このことは、実際にはひとつの内圧の関数に等しくなるように血管内の内圧が生じていないことを考慮してのことである。内圧を定義する各直交断面積の位置が異なると、異なる内圧になることが考えられることは周知である。

### 3.2. 流れの抵抗で使用する血流量

血流量を使用して、著者の定義した流れの抵抗 (3.2.1) を考察する。流れの抵抗 (3.2.1) の回路図の記号は図 3.2.1 を使用する。流れの抵抗 (3.2.1) の分母は血流量を意味する。その血流量には (3.2.2) を仮定して、流れの抵抗 (3.2.1) を定義している。流れの抵抗 (3.2.1) の分子は内圧差を意味する。この内圧差は図 3.2.1 の両端に与えた圧力の差を意味する。流れの抵抗 (3.2.1) の左辺は定数として与えている。このために、一般のヒトでの測定値を任意に使用すると、流れの抵抗 (3.2.1) の右辺はひとつの定数には固定されない。



図 3.2.1 流れの抵抗の記号

$$r = \frac{p_P(t) - p_Q(t)}{i(t)}, (p_P(t) \geq p_Q(t)) \dots (3.2.1)$$

$$i(t) \neq 0 \dots (3.2.2)$$

このことから、(3.2.1) の右辺を定数にするためには、時点 (3.2.3) を定数に固定する方法が考えられる。しかし、2008年現在では、その時点を決する方法が唯一として定めることができるかは著者には不明である。この観点についても3章2節で考察する。

$$t \dots (3.2.3)$$

ここでは、(3.2.3) を (3.2.4) として仮定する。(3.2.4) を使用して、流れの抵抗 (3.2.1) を計算すると (3.2.5) になる。

$$t = t_{\min} \dots (3.2.4)$$

$$r_{\min} = \frac{p_P(t_{\min}) - p_Q(t_{\min})}{i(t_{\min})} \dots (3.2.5)$$

図 3.2.1 の流れの抵抗を (3.2.5) とする。この場合での図 3.2.1 の流れの抵抗に生じる血流量は、(3.2.6) である。

$$i(t) = \frac{p_P(t) - p_Q(t)}{r_{\min}} \dots (3.2.6)$$

速度ベクトルの x 成分 (3.16) に直交する断面積を (3.44) として扱うものとする。

血流量 (3.49) の直交断面積は (3.44) である。血流量 (3.49) は (3.52) で記述できた。

血流量 (3.52) の内圧差を (3.2.7) のように定数になるものと仮定する。(3.2.7) を血流量 (3.52) に代入すると、(3.2.8) になる。

$$p_1(t) - p_2(t) = C_{p_{12}}, (C_{p_{12}} = \text{const.}) \dots (3.2.7)$$

$$i(t) = S_b(t) \cdot \int_{t_1}^t \frac{C_{p_{12}} \cdot S(\tau) + f_x(\tau)}{m} d\tau + S_b(t) \cdot v_x(t_1) \dots (3.2.8)$$

血流量 (3.2.8) の右辺の第1項の積分を (3.2.9) のように記述する。(3.2.9) を血流量 (3.2.8) の右辺に代入すると、血流量 (3.2.10) を記述できる。

$$v_{p_{12}}(t) = \int_{t_1}^t \frac{C_{p_{12}} \cdot S(\tau) + f_x(\tau)}{m} d\tau \dots (3.2.9)$$

$$i(t) = S_b(t) \cdot v_{p_{12}}(t) + S_b(t) \cdot v_x(t_1) \dots (3.2.10)$$

一方、(3.2.11) を血流量 (3.2.6) に代入すると、(3.2.12) になる。血流量 (3.2.10) では、定数でない意味も示している。血流量 (3.2.12) は定数である。流れの抵抗 (3.2.1) は (3.2.10) での直交断面積 (3.44)、加速度の x 成分 (3.12) および加速度の y 成分 (3.13) の影響を十分に示すことはできない。このことから、実際の血流量を記述する場合にも、血流路の直交断面積および血流の加速度から与えられる影響の一部分を、流れの抵抗 (3.2.1) では記述できない特性に含むものと著者は考える。

$$p_P(t) - p_Q(t) = C_{PQ}, (C_{PQ} = \text{const.}) \dots (3.2.11)$$

$$i(t) = \frac{C_{PQ}}{r_{\min}} = \text{const.} \dots (3.2.12)$$

(3.2.9) で、圧力差 (3.2.13) および力 (3.2.14) を仮定すると、(3.2.15) を記述できる。(3.2.15) を血流量 (3.2.10)

に代入すると (3.2.16) になる.

$$p_1(t) - p_2(t) = C_{p_{12}} = 0, (C_{p_{12}} = \text{const.}) \dots (3.2.13)$$

$$f_x(t) = 0 \dots (3.2.14)$$

$$v_{p_{12}}(t) = 0 \dots (3.2.15)$$

$$i(t) = S_b(t) \cdot v_x(t_1) \dots (3.2.16)$$

一方, 圧力差 (3.2.17) を血流量 (3.2.6) に代入すると,

(3.2.18) になる. 血流量 (3.2.16) は変数であるが, 血流量

(3.2.18) は定数の零である. このように, 流れの抵抗

(3.2.1) では, 実際の血流量を記述するには限界があるこ

とは明らかである. ただし, (3.2.19) あるいは (3.2.20)

が成立するならば血流量 (3.2.16) は (3.2.18) に一致する.

$$p_P(t) - p_Q(t) = C_{p_Q} = 0, (C_{p_Q} = \text{const.}) \dots (3.2.17)$$

$$i(t) = \frac{C_{p_Q}}{r_{\min}} = 0 = \text{const.} \dots (3.2.18)$$

$$S_b(t) = 0 \dots (3.2.19)$$

$$v_x(t_1) = 0 \dots (3.2.20)$$

流れの抵抗では, その流れの抵抗および血流量から生じる圧力の降下を示す. 流れの抵抗では, 血液に圧力は加えない. 一般には, 流れの抵抗での圧力の高いほうから低いほうに血液が流れていく過程で, その血流の向きとは逆向きの外力が血液には作用する. その外力の向きは血液の移動方向とは逆向きなので, その外力のなす仕事量は負になる. 流れの抵抗からは, 血液に外力を与えておらず, 血液が移動する際に血液の移動とは逆向きの外力となる合力が作用するならば, その系のエネルギーは減少する.

このような解釈では, 流れの抵抗では, 血液のエネルギーが減少することを示すものと解釈できる. この減少したエネルギーが, その血液に戻されることは保証がない. このことから, そのような系のエネルギーの減少は, 系のエネルギーの消費を示すものと著者は考える. 流れの抵抗で示す領域内で系として扱う血液に熱が移動してきて, その系の内部エネルギーが増加する場合では上述の流れの抵抗でのエネルギーの消費の説明とは異なる. (3.73) のような熱の移動から生じる内部エネルギーの増加で, 系のエネルギー保存則 (3.57) での, その系のエネルギーが増加する場合を流れの抵抗では説明していないものと 2008 年現在の著者は考える.

血管内の直交断面積が血液を構成している物体よりも小さい場合を仮定する. この仮定が成立する場合は, その血管の内圧差が零でない場合でも, その血管内の血流はその

断面積を通過できないで停止する. 流れの抵抗 (3.2.1) では, そのような場合を記述できない. このような場合を含めて血流路の両端の内圧差を記述するためのモデルについて考察する.

図 3.2.2 のような 2 つの端子をもつモデルを仮定する. そのモデルは (3.2.21) を満足するものと仮定する. (3.2.22) の右辺の第 2 項は (3.2.22) を満足することを仮定する.

$$p_P(t) - p_Q(t) = r \times i(t) + y_p(t) \dots (3.2.21)$$

$$y_p(t) = p_P(t) - p_Q(t) - r \times i(t) \dots (3.2.22)$$

(3.2.23) の時点で血流量が零になるものとする. その時点 (3.2.21) に代入すると (3.2.24) になる. (3.2.23) を (3.2.24) に代入すると (3.2.25) になる.

$$i(t_{\text{stop}}) = 0 \dots (3.2.23)$$

$$p_P(t_{\text{stop}}) - p_Q(t_{\text{stop}}) = r \times i(t_{\text{stop}}) + y_p(t_{\text{stop}}) \dots (3.2.24)$$

$$p_P(t_{\text{stop}}) - p_Q(t_{\text{stop}}) = y_p(t_{\text{stop}}) \dots (3.2.25)$$

(3.2.25) の左辺が正の実数であるならば, (3.2.26) を満足する. (3.2.26) では, 血流量が零でも, 図 3.2.2 のモデルには正の実数である内圧差が生じている.

$$p_1(t_{\text{stop}}) - p_2(t_{\text{stop}}) = y_p(t_{\text{stop}}) > 0 \dots (3.2.26)$$

図 3.2.2 の考察では (3.2.22) の左辺は流れの抵抗 (3.2.1) では記述できない (3.2.22) の右辺を記述するために与えたものとして考える. この (3.2.22) についても 3 章 3 節では考察する.



図 3.2.2 血流の停止を考慮したモデル

### 3.3. 電気回路でのインダクタンスおよび循環系の回路モデルでの血流量についての考察

著者が独自に構築している循環系の回路モデルの理論では, 電気回路論での素子であるインダクタンスを導入していなかった. 本論文の 3 章 3 節で, その循環系の回路モデル理論でのインダクタンスの定義を試みる.

工学の電気回路論および物理学の電磁気学では図 3.3.1 および図 3.3.2 のような記号でインダクタンスを表す. 著者が独自に構築している循環系の回路モデル理論でも図 3.3.1 および図 3.3.2 を, その理論でのインダクタンスを表す記号にする. 電気回路論および電磁気学ではインダクタンスを示す素子をインダクタあるいは誘導子と呼ぶことがある. 本

論文では、インダクタおよび誘導子と呼ぶことはしない。



図 3.3.1 インダクタンスの記号 1



図 3.3.2 インダクタンスの記号 2

本論文ではインダクタンスを (3.3.1) で示す。インダクタンス (3.3.1) は時点を独立変数とする関数である。インダクタンス (3.3.1) は連続な関数とする。

$$L(t) \dots (3.3.1)$$

インダクタンス (3.3.1) および血流量 (3.3.2) で (3.3.3) となる量を与える。血流量 (3.3.2) は図 3.3.1 および図 3.3.2 のインダクタンスに生じるものと解釈する。図 3.3.1 および図 3.3.2 のひとつの端から他方の端に流れる血液の血流量は同じ関数 (3.3.2) になる。ここでの血流量 (3.3.2) は連続な関数である。そして、量 (3.3.3) は連続な関数となる。

$$i(t) \dots (3.3.2)$$

$$L(t) \cdot i(t) \dots (3.3.3)$$

量 (3.3.3) を (3.3.4) で記述する。ここで、血流量 (3.3.2) に (3.3.5) を仮定する。さらに、量 (3.3.4) を使用して、本論文でのインダクタンスを (3.3.6) で定義する。

$$J(t) = L(t) \cdot i(t) \dots (3.3.4)$$

$$i(t) \neq 0 \dots (3.3.5)$$

$$L(t) \equiv \frac{J(t)}{i(t)} \dots (3.3.6)$$

点  $t$  での量 (3.3.4) の微分係数を (3.3.7) で記述する。そして、量 (3.3.4) の微分を (3.3.8) で与える。(3.3.7) および (3.3.8) での点  $t$  は変数としては解釈しない。(3.3.7) および (3.3.8) で変数となるものは  $h$  である。ただし、(3.3.7) および (3.3.8) での  $h$  は、それぞれ等しいものではなく、別な変数である。

$$J'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(t+h) - J(t)}{h} \dots (3.3.7)$$

$$d(L(t) \cdot i(t)) = J'(t) \cdot h \dots (3.3.8)$$

(3.3.8) の右辺の  $h$  には (3.3.9) を仮定する。(3.3.9) の左辺を (3.3.8) の右辺に代入すると (3.3.10) になる。

$$dt = h \dots (3.3.9)$$

$$d(L(t) \cdot i(t)) = J'(t) dt \dots (3.3.10)$$

(3.3.11) を仮定する。(3.3.11) が成立するならば、(3.3.10) を (3.3.12) に書き直すことができる。

$$dt \neq 0 \dots (3.3.11)$$

$$J'(t) = \frac{d(L(t) \cdot i(t))}{dt} \dots (3.3.12)$$

(3.3.13) のように、(3.3.12) の左辺は圧力差 (3.3.14) に等しいものとして記述する。この圧力差 (3.3.14) は図 3.3.1 および図 3.3.2 の両端に与える圧力の差である。

$$p(t) = \frac{d(L(t) \cdot i(t))}{dt} \dots (3.3.13)$$

$$p(t) = p_p(t) - p_o(t) \dots (3.3.14)$$

インダクタンスの定義は (3.3.6) である。(3.3.6) の右辺の分子に記述した (3.3.4) の単位は不明である。このために、(3.3.6) からインダクタンスの単位を知ることができない。ここでは、(3.3.13) を使用して、インダクタンス (3.3.6) の単位を導出する。

(3.3.13) は (3.3.15) に書き直すことができる。次元解析の記号を使用して、(3.3.15) の両辺の単位を (3.3.16) のように記述できる。

$$p(t) \cdot dt = d(L(t) \cdot i(t)) \dots (3.3.15)$$

$$\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s} \right] = [L(t)] \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right] \dots (3.3.16)$$

(3.3.16) から (3.3.17) を記述できる。(3.3.17) は (3.3.18) に整理できる。(3.3.18) の右辺の括弧の中に、インダクタンス (3.3.6) の単位が記述できた。(3.3.18) の右辺の単位は、SI で記述したものである。もし、圧力の単位を mmHg で記述するならば、(3.3.19) で記述できる。このインダクタンス (3.3.6) の単位を使用すると、(3.3.20) を記述できる。

$$[L(t)] = \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{s} \cdot \frac{\text{s}}{\text{m}^3} \right] \dots (3.3.17)$$

$$[L(t)] = \left[ \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^3} \right] \dots (3.3.18)$$

$$[L(t)] = \left[ \frac{\text{mmHg} \cdot \text{s}^2}{\text{ml}} \right] \dots (3.3.19)$$

$$L(t) = \frac{J(t)}{i(t)} \frac{\text{mmHg} \cdot \text{s}^2}{\text{ml}}, (i(t) \neq 0) \dots (3.3.20)$$

(3.3.13) を使用して、圧力差 (3.3.14) の原始関数となる量 (3.3.4) を記述する。内圧差 (3.3.14) はリーマン積分が可能な関数である。微分係数 (3.3.13) から関数 (3.3.21) を記述できる。(3.3.21) の右辺の第 2 項は定数である。関数 (3.3.21) の左辺は量 (3.3.4) の右辺である。このことから、(3.3.21) の右辺は連続な関数である。

$$L(t) \cdot i(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau + C_L \dots (3.3.21)$$

(3.3.21) の右辺の第 2 項の定数は (3.3.22) になる. 定数 (3.3.22) を (3.3.21) の右辺に代入すると, (3.3.23) になる.

$$C_L = L(t_0) \cdot i(t_0) \cdots (3.3.22)$$

$$L(t) \cdot i(t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau + L(t_0) \cdot i(t_0) \cdots (3.3.23)$$

関数 (3.3.23) では, 内圧差の関数 (3.3.14) を決定することで,  $L(t) \cdot i(t)$  が決定できる. ただし, 初期条件を与える.

関数  $L(t) \cdot i(t)$  およびインダクタンス  $L(t)$  が決定すれば, 血流量 (3.3.2) を (3.3.6) から決定することができる. 逆に, 関数  $L(t) \cdot i(t)$  および血流量 (3.3.2) が決定すれば, インダクタンス  $L(t)$  を (3.3.6) から決定することができる.

次に, インダクタンス  $L(t)$  を記述する. 関数 (3.3.23) および血流量 (3.3.2) が決定していることを仮定する. (3.3.6) から, インダクタンスを (3.3.24) で記述できる.

$$L(t) = \frac{\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau + L(t_0) \cdot i(t_0)}{i(t)} \cdots (3.3.24)$$

インダクタンス (3.3.24) に (3.3.25) を仮定する. 血流量 (3.3.2) の符号を (3.3.26) に仮定すると, インダクタンス (3.3.24) の符号は (3.3.27) になる. 血流量 (3.3.2) の符号を (3.3.28) に仮定すると, インダクタンス (3.3.24) の符号は (3.3.29) になる.

$$\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau + L(t_0) \cdot i(t_0) > 0 \cdots (3.3.25)$$

$$i(t) < 0 \cdots (3.3.26)$$

$$L(t) < 0 \cdots (3.3.27)$$

$$i(t) > 0 \cdots (3.3.28)$$

$$L(t) > 0 \cdots (3.3.29)$$

(3.3.13) から (3.3.30) になる. インダクタンスの両端の圧力差 (3.3.30) の右辺の第 1 項にはインダクタンスおよび血流量の微分係数を記述している. (3.3.30) の右辺の第 2 項には血流量およびインダクタンスの微分係数を記述している. インダクタンス (3.3.24) の微分係数は (3.3.31) で記述できる. (3.3.31) は (3.3.32) に書き直せる. (3.3.32) の右辺の第 1 項にはインダクタンスの圧力 (3.3.13) が記述されている. (3.3.32) の右辺の第 2 項には積分 (3.3.33) の圧力が記述されている. (3.3.31) を (3.3.30) の右辺に代入すると (3.3.34) になる. (3.3.34) を整理すると (3.3.35) になる. (3.3.32) は (3.3.30) から記述できる. (3.3.32) では, 血流量, 血流量の微分係数, インダクタンス (3.3.24)

および圧力差 (3.3.30) の左辺を使用する. 一方, インダクタンス (3.3.24) の変化は, (3.3.30) の左辺の圧力差, 積分 (3.3.33) の積分区間および血流量 (3.3.2) で決定する. この場合では, (3.3.32) で使用する量の種類よりも少ない種類で考察できる.

$$p(t) = (L(t) \cdot i(t))' = L(t) \cdot i'(t) + i(t) \cdot L'(t) \cdots (3.3.30)$$

$$L'(t) = \frac{p(t)}{i(t)} - i'(t) \cdot \frac{\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau + L(t_0) \cdot i(t_0)}{(i(t))^2} \cdots (3.3.31)$$

$$L'(t) = \frac{p(t)}{i(t)} - \frac{i'(t) \cdot L(t)}{i(t)}, (i(t) \neq 0) \cdots (3.3.32)$$

$$\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \cdots (3.3.33)$$

$$\begin{aligned} p(t) &= L(t) \cdot i'(t) + i(t) \cdot L'(t) \\ &= L(t) \cdot i'(t) + i(t) \cdot \left( \frac{p(t)}{i(t)} - \frac{i'(t) \cdot L(t)}{i(t)} \right) \cdots (3.3.34) \end{aligned}$$

$$p(t) = p(t) \cdots (3.3.35)$$

血流路を図 2.1.1 のように仮定する. その血流路には血液が流れているものとする. そして, その血流路に図 2.1.1 のような直交断面積を考える. さらに, その直交断面積を図 2.1.1 のように分割する. ここでは, その分割された直交断面積 (3.3.36) の個数は  $n$  個とする. それぞれの直交断面積での血流量は (3.3.37) で記述する.

$$S_k(t) \cdots (3.3.36)$$

$$i_k(t) \cdots (3.3.37)$$

血液の速度ベクトルの  $x$  成分を (3.3.38) で記述できるものとする.  $x$  軸に対しての直交断面積 (3.3.36) である. 直交断面積 (3.3.36) および速度の  $x$  成分 (3.3.38) を使用して血流量 (3.3.39) を記述する.

$$v_{kx}(t) \cdots (3.3.38)$$

$$i_k(t) = v_{kx}(t) \cdot S_k(t) \cdots (3.3.39)$$

それぞれの直交断面積 (3.3.36) の血流量 (3.3.37) を使用して,  $n$  個の直交断面積 (3.3.36) に流れた血液の血流量の総和は (3.3.40) で記述できる. (3.3.40) の右辺に (3.3.39) を代入すると, (3.3.41) を記述できる.

$$i(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t) \cdots (3.3.40)$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^n v_{kx}(t) \cdot S_k(t) \cdots (3.3.41)$$

血流量 (3.3.40) の右辺の各項は微分可能な関数であるもの

と仮定する。(3.3.40)の両辺を微分すると(3.3.42)になる。血流量(3.3.39)を使用すると、(3.3.42)の右辺の各項は(3.3.43)で記述できる。血流量(3.3.43)を(3.3.42)に代入すると(3.3.44)になる。

$$\frac{di(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{di_k(t)}{dt} \dots (3.3.42)$$

$$\frac{di_k(t)}{dt} = \frac{dv_{kx}(t)}{dt} \cdot S_k(t) + v_{kx}(t) \cdot \frac{dS_k(t)}{dt} \dots (3.3.43)$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dv_{kx}(t)}{dt} \cdot S_k(t) + \sum_{k=1}^n v_{kx}(t) \cdot \frac{dS_k(t)}{dt} \dots (3.3.44)$$

(3.3.44)の右辺の第1項には(3.3.45)を記述している。(3.3.45)は血流量(3.3.39)の血液の加速度である。血液の加速度はニュートンの運動方程式で与えるものを使用する。ニュートンの運動方程式では、質点に作用する合力が定数の場合は、その質点として扱う血液の慣性質量が大きくなると加速度の大きさは小さくなる。そして、その加速度は血液に作用する合力に正比例する。このように、慣性質量は血液の加速度に対する抵抗の性質を持つ定量的な量としてみなすことができる。このために、加速度が記述されている(3.3.44)の右辺の第1項には血液の慣性を記述しているものと解釈できる。

$$\frac{dv_{kx}(t)}{dt} \dots (3.3.45)$$

(3.3.44)の右辺の第2項には微分係数(3.3.46)を記述している。或る時点 $t_{s1}$ での(3.3.44)の右辺の第1項に記述した各項の直交断面積の総和(3.3.47)は、その時点での血流路の直交断面積になる。(3.3.47)を微分可能な関数として仮定すると、(3.3.48)を記述できる。この議論で仮定した血流路の直交断面積は、速度ベクトルを与えた血液の直交断面積になる。このことは、各時点で速度ベクトルを与えられる血液である質点の個数が定数として保証がないことになる。そのために、直交断面積の個数の増減および直交断面積の関数が異なる場合も考えられる。このような考察から、ここでは(3.3.47)が成立する或る近傍を仮定して、その近傍では(3.3.48)が成立するものと仮定する。このような近傍を仮定できることは、(3.3.47)の左辺および右辺の各項の関数が連続な関数である時間を仮定できるためである。

$$\frac{dS_k(t)}{dt} \dots (3.3.46)$$

$$S(t) = \sum_{k=1}^n S_k(t) \dots (3.3.47)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dS_k(t)}{dt} \dots (3.3.48)$$

そして、(3.3.48)が成立する時点の近傍で、血流量(3.3.44)を使用する。(3.3.44)がインダクタンスの圧力差(3.3.30)の右辺の第1項での血流量の微分係数ならば、(3.3.30)は血液の加速度(3.3.45)および血流路の直交断面積(3.3.36)を使用して記述できる。このような考察では、インダクタンスの圧力差(3.3.30)では血液の慣性を説明する部分が記述されている。血液の速度のx成分、直交断面積およびそれらの微分係数をインダクタンスの両端の圧力差には(3.3.30)で記述できるものと考えられる。時間の各区間に血流量を(3.3.44)のように記述して、それらを繋ぐことで、その時間内の血流量を近似の計算で記述できるものとする。そして、その時間内では、血流路の直交断面積(3.3.36)および血液の速度ベクトルのx成分(3.3.38)で、血流量を近似の計算で考察できる。このことで、その時間内での(3.3.30)で血液の速度のx成分、直交断面積およびそれらの微分係数を記述できるものと考えられる。

流れの抵抗、インダクタンスおよび2つの内圧制御内圧源を循環系の回路モデルに接続した回路網である図3.3.3で、インダクタンスについて考察する。図3.3.3では(3.3.49)の回路方程式が成立する。(3.3.49)の左辺の第1項はP点の内圧である。(3.3.49)の左辺の第2項は流れの抵抗の両端の圧力差である。(3.3.49)の血流量の正の向きはP点からQ点の向きである。(3.3.49)の左辺の第3項はインダクタンスの両端の圧力差である。(3.3.49)の左辺の第4項はQ点の内圧である。ここでは、(3.3.49)を(3.3.50)に書き直す。(3.3.50)の左辺は、(3.3.51)を満足する。

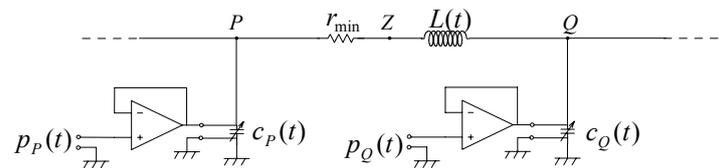


図 3.3.3 rLc プレッシャホロワ回路

$$p_P(t) - r_{\min} \cdot i(t) - p(t) - p_Q(t) = 0 \dots (3.3.49)$$

$$p(t) = p_P(t) - r_{\min} \cdot i(t) - p_Q(t) \dots (3.3.50)$$

$$p(t) = \frac{d(L(t) \cdot i(t))}{dt} \dots (3.351)$$

(3.351) の左辺を図 3.3.3 の Z 点および Q 点を使用して、(3.352) のように記述する。(3.352) の左辺の第 1 項は Z 点の圧力である。(3.352) の左辺を (3.350) の左辺に代入すると、(3.353) になる。図 3.3.3 では、Z 点の圧力は (3.354) で記述できる。(3.353) から (3.354) を導出できる。

$$p_Z(t) - p_Q(t) = \frac{d(L(t) \cdot i(t))}{dt} \dots (3.352)$$

$$p_Z(t) - p_Q(t) = p_P(t) - p_Q(t) - r_{\min} \cdot i(t) \dots (3.353)$$

$$p_Z(t) = p_P(t) - r_{\min} \cdot i(t) \dots (3.354)$$

(3.352) が (3.355) を満足する場合を考える。微分法論では、(3.355) ならば (3.356) に記述できる。 $J(t)$  の定義区間内での  $t$  を含む近傍になる或る区間で定数 (3.356) になる。

$$\frac{d(L(t) \cdot i(t))}{dt} = 0 \dots (3.355)$$

$$L(t) \cdot i(t) = \text{const.} \dots (3.356)$$

ここで、時点 (3.357) を仮定する。時点 (3.357) では、(3.358) を仮定する。(3.323) を使用すると、(3.358) から (3.359) を記述できる。(3.359) は (3.356) を満足する。(3.358) の右辺を (3.352) の右辺に代入すると (3.360) を記述できる。(3.360) では、図 3.3.3 の Z 点の圧力は Q 点の内圧に等しい。

$$t = t_{\min} \dots (3.357)$$

$$p(t_{\min}) = \frac{d(L(t_{\min}) \cdot i(t_{\min}))}{dt} = 0 \dots (3.358)$$

$$J(t_{\min}) = \int_{t_0}^{t_{\min}} p(\tau) d\tau + L(t_0) \cdot i(t_0) \dots (3.359)$$

$$p_Z(t) = p_Q(t) \dots (3.360)$$

(3.358) の右辺の値を (3.350) の左辺に代入すると、(3.361) になる。(3.358) の右辺の値を (3.330) の左辺に代入すると、(3.362) になる。

$$p(t_{\min}) = p_P(t_{\min}) - p_Q(t_{\min}) - r_{\min} \cdot i(t_{\min}) = 0 \dots (3.361)$$

$$p(t_{\min}) = L(t_{\min}) \cdot i'(t_{\min}) + i(t_{\min}) \cdot L'(t_{\min}) = 0 \dots (3.362)$$

(3.361) から (3.363) になる。(3.363) では、流れの抵抗を (3.364) で与えることができる。(3.364) では、(3.365) になる。

$$p_P(t_{\min}) - p_Q(t_{\min}) = r_{\min} \cdot i(t_{\min}) \dots (3.363)$$

$$r_{\min} = \frac{p_P(t_{\min}) - p_Q(t_{\min})}{i(t_{\min})} \dots (3.364)$$

$$i(t_{\min}) \neq 0 \dots (3.365)$$

図 3.3.3 では (3.364) で流れの抵抗を与えることができる。流れの抵抗を与えることができる時点 (3.357) では、(3.362) を使用して (3.366) を記述できる。

$$L(t_{\min}) \cdot i'(t_{\min}) = -i(t_{\min}) \cdot L'(t_{\min}) \dots (3.366)$$

一般に、(3.367) が成立することを仮定すると、(3.366) から (3.368) を記述できる。血流量の微分係数 (3.368) では、インダクタンスの微分係数の値で血流量が極値になるかどうかを考察できる。

$$L(t_{\min}) \neq 0 \dots (3.367)$$

$$i'(t_{\min}) = -\frac{i(t_{\min}) \cdot L'(t_{\min})}{L(t_{\min})} \dots (3.368)$$

(3.368) の右辺では、(3.369) が成立すると、(3.370) になる。(3.369) ではインダクタンスの微分係数が零である。そして、(3.368) から (3.370) のように血流量の微分係数が零になる。(3.369) および (3.370) では、インダクタンスおよび血流量は極値になる。

$$L'(t_{\min}) = 0 \dots (3.369)$$

$$i'(t_{\min}) = 0 \dots (3.370)$$

(3.368) の右辺では、(3.371) が成立すると、(3.372) になる。(3.371) ではインダクタンスの微分係数が零でない。そして、(3.368) から (3.372) のように血流量の微分係数が零にならない。(3.371) および (3.372) では、インダクタンスおよび血流量は極値にならない。

$$L'(t_{\min}) \neq 0 \dots (3.371)$$

$$i'(t_{\min}) \neq 0 \dots (3.372)$$

流れの抵抗 (3.364) を与えることができる時点 (3.357) では、(3.369) かつ (3.370) あるいは (3.371) かつ (3.372) のどちらかの組み合わせを満足することになる。そして、流れの抵抗 (3.364) の符号を考慮すると (3.373) になる。

$$p_P(t_{\min}) \geq p_Q(t_{\min}) \dots (3.373)$$

次に時点 (3.374) を仮定する。時点 (3.374) では (3.375) を仮定する。(3.353) に (3.375) を使用すると (3.376) になる。

$$t = t_e \dots (3.374)$$

$$p_P(t_e) - p_Q(t_e) = 0 \dots (3.375)$$

$$p_Z(t_e) - p_Q(t_e) = -r_{\min} \cdot i(t_e) \dots (3.376)$$

(3.377) が成立するならば (3.376) では (3.378) になる。(3.378) の血流量の血流の向きは Z 点から Q 点の向き

である。インダクタンスの圧力の低い Z 点から圧力の高い Q 点へ血液が移動する。

$$p_Z(t_e) < p_Q(t_e) \cdots (3.3.77)$$

$$i(t_e) > 0 \cdots (3.3.78)$$

(3.3.79) が成立するならば (3.3.76) では (3.3.80) になる。(3.3.80) の血流量の血流の向きは Q 点から Z 点の向きである。この場合の血流の向きは逆流と呼べるものと著者は考える。インダクタンスの圧力の低い Q 点から圧力の高い Z 点へ血液が移動する。

$$p_Z(t_e) > p_Q(t_e) \cdots (3.3.79)$$

$$i(t_e) < 0 \cdots (3.3.80)$$

(3.3.78) および (3.3.80) では、P 点および Q 点の内圧が (3.3.75) のように等しい場合でも、インダクタンスの圧力の低い端点から高い端点へ血液が移動している。内圧差が零でも、血液が速度および十分な直交断面積をもつならば血液は移動することができる。(3.3.78) および (3.3.80) では、そのような血液の移動を記述しているものと著者は考える。一方、流れの抵抗では、その両端では、血液は圧力の高い端点から圧力の低い端点へ移動するのみである。

電気回路論でのインダクタンスは誘導起電力で誘導電流を生じさせる。このような現象を上述での循環系の回路モデルのインダクタンスで説明するには、(3.3.78) および (3.3.80) の計算のみでは与えることはできない。図 3.3.3 の著者が定義したインダクタンスでは、その両端の圧力差で、流れの抵抗では与えられない P 点および Q 点の内圧で生じる内圧差を与えることができる。

血液に加速度が生じているものとする。その血流の血液には合力が作用している。その合力に含まれる外力の合力の方向に血液が移動しているならば、その血液を系とした系のエネルギーは増加する。逆に、その合力に含まれる外力の合力の方向とは逆向きに血液が移動しているならば、その系のエネルギーは減少する。

図 3.3.3 では、P 点および Q 点の内圧が等しい場合では、血液には内圧差で生じる力は作用していないものと 2008 年現在の著者は考える。血液が速度を持っている場合は、血液はその速度で移動することができる。ただし、その血液には粘性力、粘性抵抗および慣性抵抗などが作用することは考えられる。

時点 (3.3.81) を仮定する。時点 (3.3.81) では (3.3.82) が成立することを仮定する。(3.3.82) から (3.3.83) を記述できる。

$$t = t_n \cdots (3.3.81)$$

$$p_Z(t_n) - p_Q(t_n) = p_P(t_n) - p_Q(t_n) - r_{\min} \cdot i(t_n) < 0 \cdots (3.3.82)$$

$$p_P(t_n) - r_{\min} \cdot i(t_n) < p_Q(t_n) \cdots (3.3.83)$$

(3.3.83) では P 点の内圧および Q 点の内圧は、(3.3.84)、(3.3.85) および (3.3.86) の関係に区別することができる。

図 3.3.3 では、P 点および Q 点の内圧差のみで血液の移動する方向を考えるものとする。P 点および Q 点のそれぞれの内圧で、血液は内圧の高い位置から低い位置へ流れることになる。(3.3.84) では P 点から Q 点へ血液が移動する。

(3.3.85) では (3.3.78) および (3.3.80) で論じた。(3.3.86) では Q 点から P 点へ血液が移動する。

$$p_P(t_n) > p_Q(t_n) \cdots (3.3.84)$$

$$p_P(t_n) = p_Q(t_n) \cdots (3.3.85)$$

$$p_P(t_n) < p_Q(t_n) \cdots (3.3.86)$$

時点 (3.3.87) を仮定する。時点 (3.3.87) では (3.3.88) が成立することを仮定する。(3.3.88) から (3.3.89) を記述できる。(3.3.89) では P 点の内圧および Q 点の内圧は、(3.3.90) になる。(3.3.90) では P 点から Q 点へ血液が移動する。

$$t = t_p \cdots (3.3.87)$$

$$p_Z(t_p) - p_Q(t_p) = p_P(t_p) - p_Q(t_p) - r_{\min} \cdot i(t_p) > 0 \cdots (3.3.88)$$

$$p_P(t_p) - r_{\min} \cdot i(t_p) > p_Q(t_p) \cdots (3.3.89)$$

$$p_P(t_p) > p_Q(t_p) \cdots (3.3.90)$$

(3.3.82) で (3.3.91) を仮定する。(3.3.91) を (3.3.82) に代入すると、(3.3.92) になる。(3.3.92) から (3.3.93) を記述できる。さらに、(3.3.92) から (3.3.94) を記述できる。(3.3.91) では (3.3.55) が成立しないことは明らかである。

$$i(t_n) = 0 \cdots (3.3.91)$$

$$p_Z(t_n) - p_Q(t_n) = p_P(t_n) - p_Q(t_n) < 0 \cdots (3.3.92)$$

$$p_Z(t_n) = p_P(t_n) \cdots (3.3.93)$$

$$p_P(t_n) < p_Q(t_n) \cdots (3.3.94)$$

(3.3.88) で (3.3.95) を仮定する。(3.3.95) を (3.3.88) に代入すると、(3.3.96) になる。(3.3.96) から (3.3.97) を記述できる。さらに、(3.3.96) から (3.3.98) を記述できる。(3.3.95) では (3.3.55) が成立しないことは明らかである。

$$i(t_p) = 0 \cdots (3.3.95)$$

$$p_Z(t_p) - p_Q(t_p) = p_P(t_p) - p_Q(t_p) > 0 \cdots (3.3.96)$$

$$p_Z(t_p) = p_P(t_p) \cdots (3.3.97)$$

$$p_P(t_p) > p_Q(t_p) \cdots (3.3.98)$$

内圧の高い P 点から内圧の低い Q 点へ血液が移動する。P 点および Q 点間の内圧差が大きくなり、ヒトの血液には、より大きな力が作用する時点があるものと一般には考えられる。一般には、そのように大きくなった内圧差分で、血液の速さが大きくなる時点を考えることができる。

逆に、インダクタンスで内圧差が小さくなった場合は、その小さくなった内圧差分で、血液の速さが小さくなった時点を考えることができる。流体力学では液体の速さが大きくなると、粘性抵抗および慣性抵抗が強くなるのが報告されている。血液にも、同様に粘性抵抗および慣性抵抗が現れることが考えられる。

インダクタンスで圧力差を与えている場合では、その圧力差で生じる力が血液に作用することが考えられる。その力から説明できる外力——圧差で生じる力のみではなく粘性抵抗および慣性抵抗なども考慮する。——を扱うことになる。その外力の合力のなす仕事量が大きくなると、その外力の合力に於ける系のエネルギーの変化量分は大きくなる。一方、その外力の合力のなす仕事量が小さくなると、その外力の合力に於ける系のエネルギーの変化量分は小さくなる。インダクタンスでは血液を系とする系のエネルギーは増減する。

### 3.4. 血流量-断面積率の定義

血流量-断面積率と呼ぶ量を (3.4.1) で定義する。血流量-断面積率の定義 (3.4.1) の分母 (3.4.2) は、血流路の直交断面積である。その直交断面積 (3.4.2) における血流量 (3.4.3) を血流量-断面積率 (3.4.1) の分子に記述している。血流量-断面積率 (3.4.1) の単位は (3.4.1) の右辺のように質点の速度<sup>6)</sup>と同じである。血流量-断面積率 (3.4.1) は時点を独立変数とした関数である。そして、血流量-断面積率の定義 (3.4.1) の記述では質点の速度とは異なる量として定義している。直交断面積 (3.4.2) および血流量 (3.4.3) は層流および乱流の場合でも与えることができる量である。血流量-断面積率の定義 (3.4.1) から、量 (3.4.1) は層流および乱流の場合でも与えることができる。

$$v_p(t) \equiv \frac{dq_p(t)}{S_p(t)} \frac{m}{s}, (S_p(t) \neq 0) \dots (3.4.1)$$

$$S_p(t) m^2, (S_p(t) \neq 0) \dots (3.4.2)$$

$$\frac{dq_p(t)}{dt} \frac{m^3}{s} \dots (3.4.3)$$

血流量-断面積率の定義 (3.4.1) から血流量 (3.4.3) を (3.4.4) で記述できる。血流量 (3.4.4) は血流量-断面積率 (3.4.1) および直交断面積 (3.4.2) で記述している。

$$\frac{dq_p(t)}{dt} = S_p(t) \cdot v_p(t) \dots (3.4.4)$$

血流量 (3.4.4) は微分係数 (3.4.5) で記述できる。一般には、微分係数 (3.4.5) は連続な関数であることは保証されない。(3.4.5) を連続な関数として仮定して扱うことで、血流量-断面積率 (3.4.1) を連続な関数として考察することができる。ただし、血流路の直交断面積 (3.4.2) を連続な関数として仮定する。

$$S_p(t) \cdot v_p(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q_p(t+h) - q_p(t)}{h} \dots (3.4.5)$$

微分係数 (3.4.5) を使用すると、正味の血液量の微分を (3.4.6) で記述できる。正味の血液量の微分 (3.4.6) の右辺の時間  $h$  を時点  $t$  の微分 (3.4.7) で記述すると (3.4.8) に記述できる。

$$dq_p(t) = S_p(t) \cdot v_p(t) \cdot h m^3 \dots (3.4.6)$$

$$dt = h \dots (3.4.7)$$

$$dq_p(t) = S_p(t) \cdot v_p(t) \cdot dt \dots (3.4.8)$$

(3.4.5) から正味の血液量 (3.4.9) を記述できる。正味の血液量 (3.4.9) の右辺の第 2 項は定数になる。

$$q_p(t) = \int_{t_{i-1}}^t S_p(\tau) \cdot v_p(\tau) d\tau + q_p(t_{i-1}), (t \in [t_{i-1}, t_i]) \dots (3.4.9)$$

ここで、微分係数 (3.4.5) を (3.4.10) で記述することで、正味の血液量 (3.4.6) を (3.4.11) に記述できる。(3.4.10) からは (3.4.12) を記述できる。

$$i_p(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q_p(t+h) - q_p(t)}{h} \dots (3.4.10)$$

$$dq_p(t) = i_p(t) \cdot h m^3 \dots (3.4.11)$$

$$q_p(t) = \int_{t_{i-1}}^t i_p(\tau) d\tau + q_p(t_{i-1}), (t \in [t_{i-1}, t_i]) \dots (3.4.12)$$

直線運動をしている血液を仮定する。その血液の直線運動に平行に  $x$  軸を仮定する。その血液の速度ベクトル (3.4.13) を仮定する。速度ベクトル (3.4.13) の  $x$  軸の成分を (3.4.14) とする。 $x$  軸の成分 (3.4.14) は (3.4.15)

で与えるものとする.

$$v_1(t) \cdots (3.4.13)$$

$$v_1(t) \cdots (3.4.14)$$

$$v_1(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}, (t+h, t \in E) \cdots (3.4.15)$$

(3.4.15) から血液の  $x$  軸上の値を与える成分 (3.4.16) を記述できる. その血液を仮定した  $x$  軸上のそれぞれの位置に直交断面積 (3.4.17) を仮定する. この直交断面積 (3.4.17) は, その血液の血流路の直交断面積である. 直交断面積 (3.4.17) の位置は時点  $t$  を媒介変数として (3.4.16) に対応する.

$$x_1(t) \equiv \int_{t_0}^t v_1(\tau) d\tau + x_1(t_0) \cdots (3.4.16)$$

$$S_1(t) \cdots (3.4.17)$$

直交断面積 (3.4.17) において血流量 (3.4.18) を仮定する. その直交断面積における血流量-断面積率 (3.4.19) を与える.

$$\frac{dq_1(t)}{dt} \cdots (3.4.18)$$

$$v_{S_1}(t) = \frac{dq_1(t)}{S_1(t)}, (S_1(t) \neq 0) \cdots (3.4.19)$$

速度ベクトル (3.4.13) の成分 (3.4.14) が血流量-断面積率 (3.4.20) に等しい場合を仮定する. (3.4.20) を使用すると, (3.4.19) から (3.4.21) を記述できる. 血流量 (3.4.21) の左辺は (3.4.22) で与えるものとする.

$$v_{S_1}(t) = v_1(t) \cdots (3.4.20)$$

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = S_1(t) \cdot v_1(t) \cdots (3.4.21)$$

$$i_1(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{q_1(t+h) - q_1(t)}{h} \cdots (3.4.22)$$

(3.4.19) および (3.4.20) から (3.4.23) を記述できる. 血液に力 (3.4.24) が作用しているものと仮定する. 力 (3.4.24) は直交断面積 (3.4.17) の面積ベクトル (3.4.25) および圧力 (3.4.26) で記述している.

$$v_1(t) = \frac{dq_1(t)}{S_1(t)} \cdots (3.4.23)$$

$$f_1 = p_1(t) S_1(t) \cdots (3.4.24)$$

$$S_1(t) \cdots (3.4.25)$$

$$p_1(t) \cdots (3.4.26)$$

力 (3.4.24) のなす仕事量を (3.4.27) で記述する. そして, 仕事量 (3.4.27) に (3.4.28) を仮定する.

$$W = \int_{t_i}^t f_1 \cdot v_1 dt \cdots (3.4.27)$$

$$W = \int_{t_i}^t p_1(t) S_1(t) \cdot v_1(t) dt \cdots (3.4.28)$$

(3.4.23) を (3.4.28) の右辺に代入すると, (3.4.29) を記述できる. 仕事量 (3.4.29) は (3.4.30) に整理できる. 仕事量 (3.4.30) を微分すると仕事率 (3.4.31) を記述できる. 血流量 (3.4.22) を使用すると, 仕事率 (3.4.31) を (3.4.32) に記述できる.

$$W = \int_{t_i}^t p_1(t) S_1(t) \cdot \frac{dq_1(t)}{S_1(t)} dt \cdots (3.4.29)$$

$$W = \int_{t_i}^t p_1(t) \cdot \frac{dq_1(t)}{dt} dt \cdots (3.4.30)$$

$$\frac{dW}{dt} = p_1(t) \cdot \frac{dq_1(t)}{dt} \cdots (3.4.31)$$

$$\frac{dW}{dt} = p_1(t) \cdot i_1(t) \cdots (3.4.32)$$

#### 4. あとがき

本論文で与えた血流量の定義から正味の血液量の時間に対する変化率で血流量を与えることができる. このことは, 体積の時間に対する変化率で血流量を記述しないで, 血流量を記述できることを意味する. この血流量の定義によって, 工学に於ける血流量の計算に力学を導入し易くなった. 一般的な流体力学では, 層流および乱流の場合では計算が異なるために血流路を流れた血液量を記述するには計算が複雑になる. 著者が与えた血流量の定義では, 層流および乱流の場合でも血流量を与えることができる. このような血流量を使用して血流を扱うことは, 血液の運動およびエネルギーを記述し易くなる. このことで, 血液を系とみなして系のエネルギー保存則および熱力学の第 1 法則を使用して, 血液の運動およびエネルギーについての枠組みを与えることができた. そのような運動およびエネルギーの枠組みの中で, 心臓-血管系の回路モデルでの血液の運動およびエネルギーについての物理理論との接点を確立できた. この接点から心臓-血管系の回路モデルの回路素子であるコンプライアンス, 流れの抵抗およびインダクタンスに, 血液の運動およびエネルギーとの接点を明確に与えることができた. そのインダクタスは, 著者が本論文で独自に定

義したものである。文献1までの著者が独自に構築した心臓-血管系の回路モデル理論にはインダクタンスを導入していなかった。本論文に於いて、著者が独自に構築している心臓-血管系の回路モデル理論の回路素子であるコンプライアンス、流れの抵抗およびインダクタンスには電気回路論のコンデンサの容量、オームの法則の電気抵抗およびインダクタンスに対応するものとする。

正味の血液量は体積とは異なる量であることは2章で論じた。その正味の血液量は体積である血液量として扱える場合がある。その体積となる血液量は血液の質量にも関係を与えることができる。そのように血液量、血液の質量および血液の密度に正味の血液量を関係付けることで、血液の運動を記述できる理論に關係を考慮することができる。本論文では、3章4節で定義した血流量-断面率で直線運動をしている血液の位置、血流量および仕事率との關係を論じた。血液の運動およびエネルギーを記述するには血液を質点として扱う際の困難な箇所が考えられ、3章4節での計算では、一般の場合には十分な記述ができる技術には達していないものと著者は考えている。このような問題を解決できることは血液の運動およびエネルギーを計算する上で重要な課題であるものと著者は考える。

## 参考文献

- 1) [富岡和人, "AL\\_COM.CVSSyst.1 on Dec. 27, 2006", 循環系に関する研究報告, \(2006-12-27\)](#)
- 2) 富岡和人, "電位の簡単な入門 2007 第 5 回", A LIFE COM., on September 1, 2008, pp.14-16.
- 3) Vladimir A.Zorich, , Roger Cooke(Translator), 2004 : Mathematical Analysis I, Spronger, pp.178-181, pp.331-333, p.351, pp.359-362.
- 4) 金原寿郎編：『基礎物理学 上巻』, (裳華房, 1963 年), p.295.
- 5) ROBERT RESNICK, DAVID HALLIDAY, KENNETH S. KRANE, 1992: PHYSICS 4th Edition Volume1, John Wiley & Sons, Inc., p.557.
- 6) 富岡和人, "特殊相対性理論の速度の変換", A LIFE COM., on July 16, 2008, pp.31-39.
- 7) 新村出編：『広辞苑第5版 CD-ROM 版』, (岩波書店, 1998)

文献2) および文献3) の改訂発行した PDF 文書へのハイパーリンク

[富岡和人, "電位の簡単な入門 2007 第 5 回", A LIFE COM.](#)

[富岡和人, "特殊相対性理論の速度の変換", A LIFE COM.](#)

容積とは文献7) からの引用では次のようになる。

『①器物の中をみたしうる分量。②立体が占めている空間の大きさ。体積。』

分量とは文献7) からの引用では次のようになる。

『①目方・かさ・割合などの量や程度。②身のほど。分際。』