# AL_COM.CVSyst.1

on Dec. 27, 2006

# 循環系の時変型集中定数回路モデル

A LIFE COM.　バイオ研究室

富岡和人

**免責事項**

A LIFFE COM.および外部の情報提供者は、ユーザーに対しこの Web サイトの内容について何ら保証するものではありません。ユーザーが A LIFFE COM.の Web サイトを利用したことにより被った損失・損害、その他 A LIFFE COM. の Web サイトに関連して被った損失・損害について、A LIFFE COM. および外部の情報提供者は、一切責任は負いません。

本論文は情報提供を目的として作成したものです。本論文の真偽に対しては、著者、A LIFE COM.および A LIFE COM.のバイオ研究室は一切の責任は負いません。

# 循環系の時変型集中定数回路モデル

富岡和人
A LIFE COM.　バイオ研究室
〒321-0216　栃木県下都賀郡壬生町壬生丁２２９－２０
℡：0282-82-6505
e-mail：alifecom@s45.xrea.com

著者抄録

心臓–血管系が数学的な近似モデルで，線形時変システムであり，その解が安定な周期解になり構造安定であることの導出に成功した．物理的な近似モデルでは，線形回路網で表現できることに成功した．

数学的モデルの線形時変システムは，行列表示では非斉次方程式と血液量の行列の出力で記述できた．非斉次方程式の強制項には心臓あるいは血管の内圧が成分となる．この線形時変システムの数値解析の計算結果は左心室の内圧と容積の測定値と完全に一致した．この数値解析の結果を示す線形時変システムの出力を任意のｎ個の成分表示となるまで拡張して，心臓部のみでなく血管部にも時変型コンプライアンスを導入した線形時変システムを記述した．この線形時変システムで使用したコンプライアンスと流れの抵抗は著者自身の独自の定義である．

本論文の循環系の回路モデルの物理的モデルを電子工学の線形回路網と看做してキルヒホッフの法則を使用して線形微分方程式系を導出することに成功した．物理的モデルには上述の流れの抵抗とコンプライアンスが回路要素として使われている．このほかに，上述の非斉次方程式の強制項に対応する線形回路を設計した．この線形回路は，電子回路のボルテージホロワに対応する循環系の演算増幅器，と時変型コンプライアンスを接続したものである．この循環系の線形回路モデルは，電子回路の電圧制御電圧源に対応関係をもつ．

キーワード　心臓–血管系・集中定数回路モデル・コンプライアンス・流れの抵抗・キルヒホッフの法則・線形素子・線形回路網・線形時変システム・非斉次方程式・強制項

# The time-varying lumped circuit model of the cardiovascular system.

KAZUHITO TOMIOKA
A LIFE COM. Bio Room
229-20 Mibutei Mibumachi Simotsugagun Tochigi 321-0216 JAPAN
TEL：0282-82-6505
e-mail：alifecom@s45.xrea.com

Abstract

I got some mathematical approximate models and some physical approximate models of a cardiovascular system. The mathematical approximate models are linear time-varying systems. Solutions of the linear time-varying systems are periodic solutions. Structures of the linear time-varying systems are stable. The physical approximate models are linear networks.

The linear time-varying systems have inhomogeneous equations and outputs of blood of approximate models. The inhomogeneous equations have functions of pressures of a cardiovascular system. Some results of a linear time-varying system are equal to measured values of left ventricular volume and left ventricular pressure. I have some linear time-varying systems which have n outputs. These linear time-varying systems have n resistances and n time-varying compliances which I defined.

I think the above physical approximate models linear networks of electronics, and then I get linear differential equations. I introduced Kirchhoff's law to a solution of the lumped circuit model of the cardiovascular system. This time-varying lumped circuit model of the cardiovascular system ——the above physical approximate models —— has the above resistances and the above compliances. I designed linear circuit. This linear circuit corresponds to a voltage controlled voltage source. I think some part of this linear circuit a circuit which corresponds to a voltage follower of electronics.

Keywords approximate models・cardiovascular system・linear time-varying system・periodic solution・structure・inhomogeneous・ventricular・volume・pressure・Kirchhoff's law・lumped circuit・voltage controlled voltage source ・ voltage follower

目次

## 1　まえがき

本論文では，時変型集中定数回路モデル――物理的モデル――と，その数学的モデルの特性についての報告をしている．2.1 で使用した時変型集中定数回路モデルにはコンプライアンス，流れの抵抗，スイッチおよび波形操作回路――あるいは整流素子――で構成している．スイッチは他の循環系の回路モデルで使用しているものと同じである．波形操作回路は新規性のある循環系の回路モデルの構成要素であると著者は考える．この構成要素としての波形操作回路は著者独自による提案であり，著者は成書や論文ではまだ読んだことはない．本論文ではこの波形操作回路――あるいは整流素子――は数学的処理をする際に使う簡単な規則として使用した．本論文では本格的には，この波形操作回路には取り組んではいない．コンプライアンスおよび流れの抵抗は成書での循環系の回路モデルにも使用しているが，本論文のそれらは著者独自による定義を 2.2 で与えている．このコンプライアンスは 1999 年に著者が既に発表している．心臓部で使ったコンプライアンスは時変型のコンプライアンスである．この時変型のコンプライアンスは線形作用素として満足する．そして，電気回路素子と対応関係を与えると線形素子となる．

これらの回路の構成要素と循環系の回路モデルを電気回路――あるいは電子回路――とその物理量に対応させた関係を与えて，回路方程式を導出している．この場合は，循環系の回路モデルを電気回路論の線形回路網として看做すことができる．この回路方程式の導出の際にはキルヒホッフの法則の電流連続の法則と電圧平衡の法則を使って導出することに成功した．

導出した回路方程式から線形時変システムを記述した．この線形時変システムは非斉次方程式で記述した．3 章で，この線形微分方程式系を数値解析した計算結果では，この方程式系の左心室の容積と内圧の値とそれらの測定値とは完全に一致した．著者の学生時代の文献調査では心室の容積と内圧の両方を同時に計算してそれらの測定値と比較した文献は見つからなかった．また,循環系の数学的モデルの計算結果では測定値と完全に一致したものも著者の文献調査では見つからなかった．

４章では数学的モデルや３章の解析結果の考察をした．4.2.1 では運動方程式からコンプライアンスの導出をした．２章で定義したコンプライアンスが内圧で定義したのに対して，この導出したコンプライアンスは応力で記述してある．また，4.2.1 では生理学で紹介してあるコンプライアンスから ε－近傍で保証がある第一階の導関数となるコンプライアンスを導出した．さらに，そのコンプライアンスの媒介変数表示の記述をした．この媒介変数表示のコンプライアンスは特に他の循環系の回路モデルで数学的記述の同じものが使用されている．

しかし，上述の生理学からの媒介変数表示の第一階の導関数のコンプライアンスは血圧でなく，０ｍｍＨｇに対する内圧で計算している．一般的な循環系の回路モデルでは，生理学からの――第一階の導関数の――コンプライアンスに血圧を使用している．この一般的な循環系の回路モデルのコンプライアンスの計算では，測定値からの考察では分母に零をとるものが多いようであると著者は考える．この定義域を無視した使用は，――4.3 で論じたが――物理学でのベルヌーイの定理やハーゲン・ポアズイユの法則とも整合しない計算を導くことになる．本論文で，このような数学理論や物理学とは異なる結果を得る使用を防げれば循環系の回路モデル分野にとって幸いではないかと著者は考える．

上述で説明したように本論文では，内圧と応力のそれぞれでコンプライアンスを定義している．運動方程式から導出したものは体積密度×加速度が零でないことが前提となる．このために，つりあい状態にあり，加速度が零になるものではコンプライアンスは定義していない．他方，体積密度×加速度が零の場合でも計算できるコンプライアンスを定義した．そして，これらのコンプライア

ンスを統一的に扱うための基礎を D'Alembert の原理で考察してみた．

4.9 では，3 章の非斉次方程式のコンプライアンスの部分をすべて時変型のコンプライアンスに替えた．さらに，その非斉次方程式の強制項をすべてのコンプライアンスの内圧で記述した．ただし，流れの抵抗とコンプライアンスの個数は n 個に拡張した．この書き換えた非斉次方程式は，解は安定な周期解で構造安定な微分方程式であることを著者は考察した．心臓−血管系では非線形性を主張する文献もある．循環系の回路モデルを線形回路網でこのような線形微分方程式系に記述することは成書でも著者は読んだことはない．

4.10 では 4.9 の線形微分方程式を導出できる物理的モデルを設計することに成功した．循環系の回路モデルは時変型コンプライアンスと流れの抵抗の個数をそれぞれ n 個に拡張してある．この n 個のコンプライアンスに次の演算増幅器を接続したものが，その新しい循環系の回路モデルである．その演算増幅器はボルテージホロワと呼ばれるものである．このボルテージホロワに対応する循環系の回路モデルの演算増幅器を定義した．
この演算増幅器と時変型コンプライアンスを接続して線形回路を設計した．この新しい線形回路は電子回路の電圧制御電圧源に対応関係を与えた．
この電圧制御電圧源に対応する線形回路は著者独自の提案である．この線形回路に使用しているボルテージホロワと対応する演算増幅回路も著者独自の提案である．

さらに，以下のように幾つかの考察をした．本論文では質点系の力学で液体を扱いコンプライアンスを計算している．しかし，この質点系のコンプライアンスを使うには本論文の考察だけでは十分でない．その理由の一つとして，質点系の計算での熱力学的変化の影響を考察していない．著者が十分なデータを持っていないことを理由に本論文では，この考察をしていない．また，既知の生理学での指導を考察するために著者が参考に使ったものが 4.4 での容積と応力の正規直交系での考察である．同様に，容積と応力の媒介変数表示——時間 $t$——の平面座標上での接線の傾きとコンプライアンスの考察を 4.6 で行った．4.6 では著者が定義したコンプライアンスを使って，力・加速度・体積密度・容積・応力・断面積などの関係を考察した．4.6 の最後には著者の定義したコンプライアンスを平均変化率として考察した．この平均変化率での考察は心臓−血管系の発生からコンプライアンスを追跡する技術についての考察へ結ぶことを著者は考えている．しかし，4.6 の平均変化率の考察では，この追跡の考察へ結ぶことは完了していない．4.6 の考察は全体として，コンプライアンスでシステムとしての心臓−血管系を解析するための参考までのものである．

## 2　理論 [1) 2)]

本論文では，2.1 の物理的モデルと 2.2 の数学的モデルによる計算をしている．2.1 で本論文の循環系の線形時変システムを導出するのに使う物理的モデルを論じる．2.1 の物理的モデルから研究を始めて，最終的には本論文の研究成果となる 4.10.2 の循環系の回路モデルの物理的モデルに結ぶことになる．2.2 で循環系の回路モデルの要素と電気回路の要素との対応関係を与える．その対応関係を用いて図 2.1 の物理的モデルを電気回路として計算すると，本論文でシミュレーションをする連立微分方程式群が得られる．2.2 の数学的モデル——特に時変型コンプライアンスと流れの抵抗——と電気回路要素との対応関係は本論文の最後まで使用する．

### 2.1　物理的モデル

図 2.1 は本研究論文の物理的モデルである．実際の人間システムの循環系は図 2.1 よりも複雑なシステムである．

$r_1$～$r_9$ は，時不変型流れの抵抗である．$c_1(t)$ と $c_6(t)$ はそれぞれ左心室と右心室の時変型コンプライアンスである．$c_9(t)$ と $c_5(t)$ はそれぞれ左心房と右心房の時変型コンプライアンスである．$c_2$，$c_3$，$c_4$，$c_7$ および $c_8$ は定数の時不変型コンプライアンスである．$c_3$, $c_4$,

$c_7$ および $c_8$ は物理的モデルを簡単化するために仮想的に幾つかの血流路をまとめたモデルである．$c_2$ は上行大動脈である．$c_3$ は動脈–毛細血管系である．$c_4$ は毛細血管–静脈系である．$c_7$ は右心室に近い動脈系である．$c_8$ は $c_7$ に含まれない肺循環の血流路として記述している．図 2.1 の物理的モデルのコンプライアンスと流れの抵抗は本論文 2.2 で著者が定義した式で与える．波形操作回路 BC1 ——あるいは整流素子——は静脈弁として扱うものとする．この波形操作回路の静脈弁としての使用は著者の独自の提案である．この波形操作回路を使用した文献を，まだ著者は読んだ事はない．本論文の波形操作回路は電子回路論の波形操作回路と同じ特性にする計画ではない．実際の弁の特性は電子工学での波形操作回路とは異なる特性であるものと著者は考える．また，電子回路論のダイオードとは実際の弁の特性は異なるものと著者は考える．ダイオードよりも弁の特性に近い循環系の回路モデルの要素の設計を考え，波形操作回路を著者は提案した．本論文では，この波形操作回路と静脈弁の対応関係を，本格的には研究していない．この波形操作回路の数学的処理としては，回路方程式を導出する際に簡単な規則として使用した．スイッチは近似モデルとして心臓弁を記述した．

図 2.1 の本論文の解釈では，状態（収縮期や拡張期など）により各時不変型集中定数は変化することが可能である．また，波形操作回路の特性を替えることも可能である．スイッチの開閉特性は心臓周期の時間関係に従って決定した．

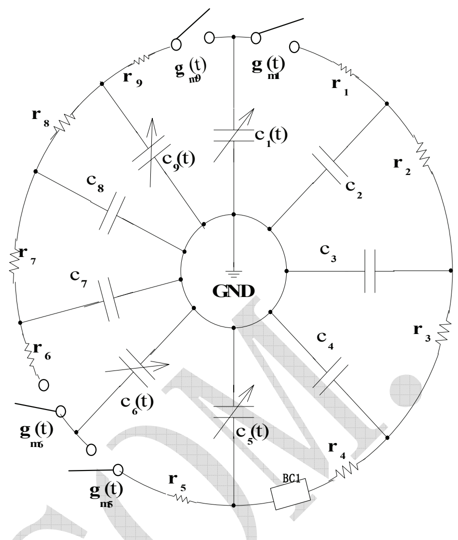


図 2.1　時変型集中定数回路モデル

図 2.1 の物理的モデルの要素についての解釈を挙げる．
物理的モデルの要素への物理的解釈
$r_1,r_5,r_6,r_9$：流れの抵抗
$r_2,r_3,r_4$：体循環に於ける流れの抵抗；$r_7,r_8$：肺循環に於ける流れの抵抗
$c_2$：体循環に於ける上行大動脈のコンプライアンス
$c_3$：体循環に於ける血流路(血流路 1)のコンプライアンス
$c_4$：体循環に於ける血流路(血流路 2)のコンプライアンス
$c_1(t)$：左心室のコンプライアンス；$c_5(t)$：右心房のコンプライアンス
$c_6(t)$：右心室のコンプライアンス；$c_9(t)$：左心房のコンプライアンス
$c_7$：肺循環に於ける血流路(血流路 3)のコンプライアンス
$c_8$：肺循環に於ける血流路(血流路 4)のコンプライアンス
BC1（整流素子あるいは波形操作回路）：静脈弁
$g_{m1}$(出口弁)：大動脈弁(半月弁)；$g_{m5}$(入口弁)：三尖弁(房室弁)
$g_{m6}$(出口弁)：肺動脈弁(半月弁)；$g_{m9}$(入口弁)：僧帽弁(房室弁)

## 2.2　数学的モデル

2.2 では，図 2.1 の循環系の回路モデルで使う循環系の回路要素を定義した．さらに，それらの要素を使って電気回路論のキルヒホッフの法則を用いて連立微分方程式群を導出している．

### 2.2.1 時変型コンプライアンス

本論文で，心臓部に利用されている時変型のコンプライアンスは，著者が (2.2.1.1) に定義した．(2.2.1.1) の分子は血液量あるいは容積である．一般的には，(2.2.1.1) の分母の内圧は (2.2.1.2) の左辺であるとする．(2.2.1.2) の右辺の第一項は血圧であり，第二項は大気圧である．また，$p(t)$ は 0 mmHg に対する血管あるいは心臓に

作用する内圧である．図 2.2 は血圧の説明図である．図 2.2 の点ｈは心臓あるいは血管の内壁にあるものとする．

$$c(t) \equiv \frac{q(t)}{p(t)}\left[\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{mmHg}}\right], (p(t) \neq 0) \cdots (2.2.1.1)$$

$$p(t) = p_{\mathrm{v}}(t) + p_0(t)[\mathrm{mmHg}] \cdots (2.2.1.2)$$

$$p_{\mathrm{v}}(t) = p(t) - p_0(t)[\mathrm{mmHg}] \cdots (2.2.1.3)$$

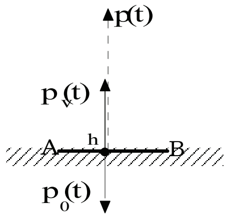


図 2.2　血圧の説明図

図 2.2 に点ｈを仮定する．この点ｈに内圧（2.2.1.4）を図 2.2 の矢印の方向に仮定する．このとき，点ｈに大気圧（2.2.1.5）を図 2.2 の矢印の方向に仮定する．ここで，点ｈに血圧（2.2.1.6）を図 2.2 の矢印の方向に仮定する．図 2.2 に断面積ＡＢ（2.2.1.7）を想像する．このとき，(2.2.1.4)～(2.2.1.6) の圧縮力は断面積ＡＢ (2.2.1.7) で点ｈに作用する各力で定義できるものとする．ただし，断面積ＡＢ（2.2.1.7）の断面は，図 2.2 の矢印の方向に垂直である．ここで，断面積ＡＢ（2.2.1.7）に作用する各力は（2.2.1.8）のように釣り合うものとする．(2.2.1.8)の右辺の第一項と第二項は，実際に存在する力である．（2.2.1.8）の――負号を含める――第三項は（2.2.1.8）の釣り合いの関係を説明するために仮定した力である．また，（2.2.1.8）の右辺の第三項の力は（2.2.1.8）の右辺の第一項と第二項の減算によるベクトルとは逆の向きで同じ大きさである．

(2.2.1.8) から (2.2.1.9) のように (2.2.1.7) に掛けた各圧縮力の加減算を記述できる．（2.2.1.9）からこの加減算のみを（2.2.1.10）のように残すことができる．(2.2.1.10) から血圧 (2.2.1.6) が (2.2.1.11) に記述できる．

$$p(t) \cdots (2.2.1.4)$$

$$p_0(t) \cdots (2.2.1.5)$$

$$p_{\mathrm{v}}(t) \cdots (2.2.1.6)$$

$$S \cdots (2.2.1.7)$$

$$(p(t) \times S - p_0(t) \times S) - p_{\mathrm{v}}(t) \times S = 0 \cdots (2.2.1.8)$$

$$(p(t) - p_0(t) - p_{\mathrm{v}}(t)) \times S = 0 \cdots (2.2.1.9)$$

$$p(t) - p_0(t) - p_{\mathrm{v}}(t) = 0 \cdots (2.2.1.10)$$

$$p_{\mathrm{v}}(t) = p(t) - p_0(t) \cdots (2.2.1.11)$$

### 2.2.2　時不変型流れの抵抗

本論文で，時不変型の流れの抵抗は，著者が（2.2.2.1）に定義した．本論文での流れの抵抗の計算は，すべて時不変型集中定数回路要素である．ただし，$p_1(t)$と $p_2(t)$は（2.2.1.2）の左辺である．$i(t)$は（2.2.2.2）で血流量である．(2.2.2.2）の $q(t)$は血液量あるいは容積である．時間 $T=T_2-T_1$（$T_2>T_1$）の平均値は (2.2.2.3) と (2.2.2.4) に記述できる．バーは時間 $T$ の平均を意味する．(2.2.2.3）と（2.2.2.4）から時不変型流れの抵抗 $r$ を（2.2.2.5）に計算できる．

$$r \equiv \frac{p_2(t) - p_1(t)}{i(t)}\left[\frac{\mathrm{mmHg \cdot s}}{\mathrm{ml}}\right] \cdots (2.2.2.1)$$

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}\,q(t)}{\mathrm{d}\,t}\left[\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{s}}\right] \cdots (2.2.2.2)$$

$$\bar{i}(t) = \frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_2} i(t)\,\mathrm{d}\,t \cdots (2.2.2.3)$$

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_2} p(t)\,\mathrm{d}\,t \cdots (2.2.2.4)$$

$$r = \frac{\bar{p}_2(t) - \bar{p}_1(t)}{\bar{i}(t)} \cdots (2.2.2.5)$$

(2.2.2.1）で，実際の生体情報を時不変型集中定数で記述することは難しく，定数と

して算出できない場合が多い．本論文では，対象となる生物が獲得可能と考えられる最小値 $r_{\mathrm{min.}}$ から最大値 $r_{\mathrm{max.}}$ の間の $r_{\mathrm{min.}} \leqq r \leqq r_{\mathrm{max.}}$ の範囲から定数 $r$ を定めることになる．

### 2.2.3 時不変型コンプライアンス

本論文で，時不変型のコンプライアンスは，著者が（2.2.3.1）に定義した．$p(t)$ は（2.2.1.2）である．$q(t)$ は血液量あるいは容積である．

$$c \equiv \frac{q(t)}{p(t)}\left[\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{mmHg}}\right] \cdots (2.2.3.1)$$

式（2.2.3.1）から式（2.2.3.2）を導出できる．式(2.2.3.2)の時間 $T=T_2-T_1$ ($T_2>T_1$) の平均値を計算すると（2.2.3.3）が記述できる．（2.2.3.3）から（2.2.3.4）が記述できる．バーは時間 $T$ の平均を意味する．（2.2.3.4）から（2.2.3.5）が算出できる．

$$q(t) = c \times p(t) \cdots (2.2.3.2)$$

$$\overline{q}(t) = \frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_2} q(t)\,\mathrm{d}t \cdots (2.2.3.3)$$

$$\overline{q}(t) = c \times \overline{p}(t) \cdots (2.2.3.4)$$

$$c = \frac{\overline{q}(t)}{\overline{p}(t)} \cdots (2.2.3.5)$$

（2.2.3.1）で，実際の生体情報を時不変型集中定数で記述することは難しく，定数として算出できない場合が多い．本論文では，対象となる生物が獲得可能と考えられる最小値 $c_{\mathrm{min.}}$ から最大値 $c_{\mathrm{max.}}$ の間の $c_{\mathrm{min.}} \leqq c \leqq c_{\mathrm{max.}}$ の範囲から定数 $c$ を定めることになる．

標準的な測定値の平均的な値を専門書にみることができる．本論文の時不変型集中定数（2.2.2.5）あるいは（2.2.3.5）は主にこのような測定データから算出するために定義している．

### 2.2.4 連立微分方程式

本論文では，心臓の室と房のコンプライアンスの時間関係は図 2.3 の心臓周期の時間関係から与えている．図 2.3 から心臓の心室と心房との心時相の対応を知ることができる．図 2.3 の心臓周期の時間関係では，心房と心室の心周期は 0.8 秒間となる．心房の収縮期は 0.1 秒間・心房の弛緩期は 0.7 秒間である．心室の収縮期は 0.35 秒間・心室の弛緩期は 0.45 秒間である．心房の弛緩期の 0.7 秒間に心室の収縮期の 0.35 秒間と心室の弛緩期の 0.35 秒間が認められる．心房の収縮期の０.１秒間では心室の弛緩期の 0.1 秒間が認められる．ただし，ここで挙げている値は標準的な測定値であると著者は考える．

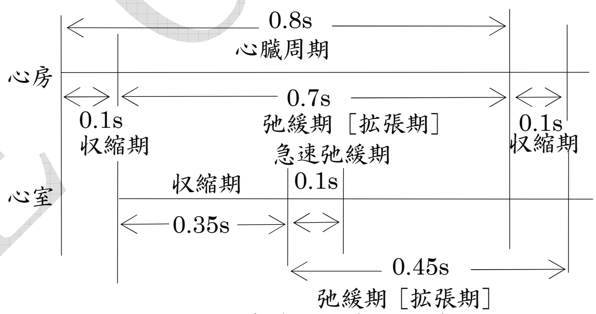


図 2.3 心臓周期の時間関係

心臓周期の時間関係図 2.3 から心房の血液量の増減を予測している．心臓の収縮期と弛緩期には血液の流出と流入がみられる．この前提で，心房の血液量の増減から図 2.1 の心房部のコンプライアンス（2.2.1.1）の特性曲線の増減の様子を知ることができる．

本論文では(2.2.1.1)，(2.2.1.2)，(2.2.2.1)および（2.2.3.1）を仮定の上で，図 2.4 を与えた．循環系の回路モデルの要素と電気回路の要素との対応関係を図 2.4 のように与える．この対応関係を導入して物理的モデルから循環系の連立微分方程式の導出をする．

| | | |
|---|---|---|
| 内圧 | ⇔ | 電位 |
| 流れの抵抗 | ⇔ | 電気抵抗 |
| 血液量 | ⇔ | 電気量 |
| コンプライアンス | ⇔ | コンデンサ |

図 2.4　電気回路要素との対応関係

図 2.4 の導入で，循環系の回路モデル図 2.1 をｒ――電気抵抗――とｃ――コンデンサ――の電気回路として計算できる．このことからキルヒホッフの法則を用いて回路方程式を記述することが可能となっている．

図 2.1 の物理的モデルでの心室の収縮期と拡張期の２つの状態に対して図 2.4 の電気回路要素との対応関係を導入した．このことで，電気回路論のキルヒホッフの法則により回路方程式が記述できる．これらの回路方程式の連立方程式と（2.2.4.1）で構成する連立方程式から（2.2.4.2）～（2.2.4.19）を導出する．ただし，血液の流れは左心室から上行大動脈へと流れ，回路を一周して再び左心室に戻ることを仮定して，回路方程式を導出する．この仮定が図 2.1 ではBC1の機能を含めた規則と成る．本論文の簡単なモデル（2.2.4.2）～（2.2.4.19）では，理論上で（2.2.4.1）は心臓周期に対していつでも成立する．

$$\sum_{i=1}^{9}\frac{\mathrm{d}q_{ci}}{\mathrm{d}t}=0\cdots(2.2.4.1)$$

（2.2.4.2）～（2.2.4.19）の連立微分方程式は（2.2.4.20）の周期係数行列の微分方程式に記述できる．この変数係数行列の微分方程式は，(2.2.4.21）のような初期値問題とすると次のような解の一意性と大域解の保証がある[3)]．

変数係数行列がＲ上で定義された $t$ 上の連続関数を成分とする 9×9 行列である．このとき，(2.2.4.21）は，任意の初期値 $\eta$ に対してただ一つの解をもち，しかも $-\infty<t<\infty$ 上で大域的に存在する．

３章のシミュレーションの数学的モデルは，(2.2.4.22）と（2.2.4.23）を利用して（2.2.4.28）～（2.2.4.45）に記述できる．しかし，非斉次方程式（2.2.4.28）～（2.2.4.45）に記述すると斉次方程式(2.2.4.20）とは異なる微分方程式である．

収縮期：(2.2.4.2) ～ (2.2.4.10) は収縮期に成立する循環系の連立微分方程式である．

$$\frac{\mathrm{d}q_{c1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_{c1}(t)}{r_1\times c_1(t)}+\frac{q_{c2}(t)}{r_1\times c_2}\right)\cdots(2.2.4.2)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c2}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c1}(t)}{r_1\times c_1(t)}-\frac{q_{c2}(t)}{r_1\times c_2}\right)+\left(-\frac{q_{c2}(t)}{r_2\times c_2}+\frac{q_{c3}(t)}{r_2\times c_3}\right)\cdots(2.2.4.3)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c3}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c2}(t)}{r_2\times c_2}-\frac{q_{c3}(t)}{r_2\times c_3}\right)+\left(-\frac{q_{c3}(t)}{r_3\times c_3}+\frac{q_{c4}(t)}{r_3\times c_4}\right)\cdots(2.2.4.4)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c4}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c3}(t)}{r_3\times c_3}-\frac{q_{c4}(t)}{r_3\times c_4}\right)+\left(-\frac{q_{c4}(t)}{r_4\times c_4}+\frac{q_{c5}(t)}{r_4\times c_5(t)}\right)\cdots(2.2.4.5)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c5}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c4}(t)}{r_4\times c_4}-\frac{q_{c5}(t)}{r_4\times c_5(t)}\right)\cdots(2.2.4.6)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c6}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_{c6}(t)}{r_6\times c_6(t)}+\frac{q_{c7}(t)}{r_6\times c_7}\right)\cdots(2.2.4.7)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c7}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c6}(t)}{r_6\times c_6(t)}-\frac{q_{c7}(t)}{r_6\times c_7}\right)+\left(-\frac{q_{c7}(t)}{r_7\times c_7}+\frac{q_{c8}(t)}{r_7\times c_8}\right)\cdots(2.2.4.8)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c8}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c7}(t)}{r_7\times c_7}-\frac{q_{c8}(t)}{r_7\times c_8}\right)+\left(-\frac{q_{c8}(t)}{r_8\times c_8}+\frac{q_{c9}(t)}{r_8\times c_9(t)}\right)\cdots(2.2.4.9)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c9}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c8}(t)}{r_8\times c_8}-\frac{q_{c9}(t)}{r_8\times c_9(t)}\right)\cdots(2.2.4.10)$$

拡張期：(2.2.4.11) ～ (2.2.4.19) は拡張期に成立する循環系の連立微分方程式である．

$$\frac{\mathrm{d}q_{c1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c9}(t)}{r_9\times c_9(t)}-\frac{q_{c1}(t)}{r_9\times c_1(t)}\right)\cdots(2.2.4.11)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c2}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_{c2}(t)}{r_2\times c_2}+\frac{q_{c3}(t)}{r_2\times c_3}\right)\cdots(2.2.4.12)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c3}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c2}(t)}{r_2\times c_2}-\frac{q_{c3}(t)}{r_2\times c_3}\right)+\left(-\frac{q_{c3}(t)}{r_3\times c_3}+\frac{q_{c4}(t)}{r_3\times c_4}\right)\cdots(2.2.4.13)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c4}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c3}(t)}{r_3\times c_3}-\frac{q_{c4}(t)}{r_3\times c_4}\right)+\left(-\frac{q_{c4}(t)}{r_4\times c_4}+\frac{q_{c5}(t)}{r_4\times c_5(t)}\right)\cdots(2.2.4.14)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c5}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c4}(t)}{r_4\times c_4}-\frac{q_{c5}(t)}{r_4\times c_5(t)}\right)+\left(-\frac{q_{c5}(t)}{r_5\times c_5(t)}+\frac{q_{c6}(t)}{r_5\times c_6(t)}\right)\cdots(2.2.4.15)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c6}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c5}(t)}{r_5\times c_5(t)}-\frac{q_{c6}(t)}{r_5\times c_6(t)}\right)\cdots(2.2.4.16)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c7}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_{c7}(t)}{r_7\times c_7}+\frac{q_{c8}(t)}{r_7\times c_8}\right)\cdots(2.2.4.17)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c8}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c7}(t)}{r_7\times c_7}-\frac{q_{c8}(t)}{r_7\times c_8}\right)+\left(-\frac{q_{c8}(t)}{r_8\times c_8}+\frac{q_{c9}(t)}{r_8\times c_9(t)}\right)\cdots(2.2.4.18)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{c9}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{c8}(t)}{r_8\times c_8}-\frac{q_{c9}(t)}{r_8\times c_9(t)}\right)+\left(-\frac{q_{c9}(t)}{r_9\times c_9(t)}+\frac{q_{c1}(t)}{r_9\times c_1(t)}\right)\cdots(2.2.4.19)$$

変数係数行列 $A(t)$ の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)\times q(t)\cdots(2.2.4.20)$$

初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,t} = A(t)q \\ q(t_0) = \eta \end{cases} \cdots (2.2.4.21)$$

(2.2.4.22) と (2.2.4.23) を用いて，(2.2.4.3)，(2.2.4.8)，(2.2.4.15)，(2.2.4.19) から (2.2.4.24) ～ (2.2.4.27) を導出する．

$$p_{c1}(t) = \frac{q_{c1}(t)}{c_1(t)} \cdots (2.2.4.22)$$

$$p_{c6}(t) = \frac{q_{c6}(t)}{c_6(t)} \cdots (2.2.4.23)$$

収縮期：

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c2}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{p_{c1}(t)}{r_1} - \frac{q_{c2}(t)}{r_1 \times c_2}\right) + \left(-\frac{q_{c2}(t)}{r_2 \times c_2} + \frac{q_{c3}(t)}{r_2 \times c_3}\right) \cdots (2.2.4.24)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c7}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{p_{c6}(t)}{r_6} - \frac{q_{c7}(t)}{r_6 \times c_7}\right) + \left(-\frac{q_{c7}(t)}{r_7 \times c_7} + \frac{q_{c8}(t)}{r_7 \times c_8}\right) \cdots (2.2.4.25)$$

拡張期：

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c5}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{q_{c4}(t)}{r_4 \times c_4} - \frac{q_{c5}(t)}{r_4 \times c_5(t)}\right) + \left(-\frac{q_{c5}(t)}{r_5 \times c_5(t)} + \frac{p_{c6}(t)}{r_5}\right) \cdots (2.2.4.26)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c9}(t)}{\mathrm{d}\,t} = \left(\frac{q_{c8}(t)}{r_8 \times c_8} - \frac{q_{c9}(t)}{r_8 \times c_9(t)}\right) + \left(-\frac{q_{c9}(t)}{r_9 \times c_9(t)} + \frac{p_{c1}(t)}{r_9}\right) \cdots (2.2.4.27)$$

収縮期：(2.2.4.28) ～ (2.2.4.36) は収縮期のシミュレーションに使った連立微分方程式である.

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c1}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(-\frac{q_{c1}(t)}{r_1\times c_1(t)}+\frac{q_{c2}(t)}{r_1\times c_2}\right)\cdots(2.2.4.28)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c2}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{p_{c1}(t)}{r_1}-\frac{q_{c2}(t)}{r_1\times c_2}\right)+\left(-\frac{q_{c2}(t)}{r_2\times c_2}+\frac{q_{c3}(t)}{r_2\times c_3}\right)\cdots(2.2.4.29)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c3}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c2}(t)}{r_2\times c_2}-\frac{q_{c3}(t)}{r_2\times c_3}\right)+\left(-\frac{q_{c3}(t)}{r_3\times c_3}+\frac{q_{c4}(t)}{r_3\times c_4}\right)\cdots(2.2.4.30)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c4}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c3}(t)}{r_3\times c_3}-\frac{q_{c4}(t)}{r_3\times c_4}\right)+\left(-\frac{q_{c4}(t)}{r_4\times c_4}+\frac{q_{c5}(t)}{r_4\times c_5(t)}\right)\cdots(2.2.4.31)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c5}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c4}(t)}{r_4\times c_4}-\frac{q_{c5}(t)}{r_4\times c_5(t)}\right)\cdots(2.2.4.32)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c6}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(-\frac{q_{c6}(t)}{r_6\times c_6(t)}+\frac{q_{c7}(t)}{r_6\times c_7}\right)\cdots(2.2.4.33)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c7}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{p_{c6}(t)}{r_6}-\frac{q_{c7}(t)}{r_6\times c_7}\right)+\left(-\frac{q_{c7}(t)}{r_7\times c_7}+\frac{q_{c8}(t)}{r_7\times c_8}\right)\cdots(2.2.4.34)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c8}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c7}(t)}{r_7\times c_7}-\frac{q_{c8}(t)}{r_7\times c_8}\right)+\left(-\frac{q_{c8}(t)}{r_8\times c_8}+\frac{q_{c9}(t)}{r_8\times c_9(t)}\right)\cdots(2.2.4.35)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c9}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c8}(t)}{r_8\times c_8}-\frac{q_{c9}(t)}{r_8\times c_9(t)}\right)\cdots(2.2.4.36)$$

拡張期：(2.2.4.37) ～ (2.2.4.45) は拡張期のシミュレーションに使った連立微分方程式である.

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c1}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c9}(t)}{r_9\times c_9(t)}-\frac{q_{c1}(t)}{r_9\times c_1(t)}\right)\cdots(2.2.4.37)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c2}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(-\frac{q_{c2}(t)}{r_2\times c_2}+\frac{q_{c3}(t)}{r_2\times c_3}\right)\cdots(2.2.4.38)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c3}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c2}(t)}{r_2\times c_2}-\frac{q_{c3}(t)}{r_2\times c_3}\right)+\left(-\frac{q_{c3}(t)}{r_3\times c_3}+\frac{q_{c4}(t)}{r_3\times c_4}\right)\cdots(2.2.4.39)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c4}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c3}(t)}{r_3\times c_3}-\frac{q_{c4}(t)}{r_3\times c_4}\right)+\left(-\frac{q_{c4}(t)}{r_4\times c_4}+\frac{q_{c5}(t)}{r_4\times c_5(t)}\right)\cdots(2.2.4.40)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c5}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c4}(t)}{r_4\times c_4}-\frac{q_{c5}(t)}{r_4\times c_5(t)}\right)+\left(-\frac{q_{c5}(t)}{r_5\times c_5(t)}+\frac{p_{c6}(t)}{r_5}\right)\cdots(2.2.4.41)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c6}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c5}(t)}{r_5\times c_5(t)}-\frac{q_{c6}(t)}{r_5\times c_6(t)}\right)\cdots(2.2.4.42)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c7}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(-\frac{q_{c7}(t)}{r_7\times c_7}+\frac{q_{c8}(t)}{r_7\times c_8}\right)\cdots(2.2.4.43)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c8}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c7}(t)}{r_7\times c_7}-\frac{q_{c8}(t)}{r_7\times c_8}\right)+\left(-\frac{q_{c8}(t)}{r_8\times c_8}+\frac{q_{c9}(t)}{r_8\times c_9(t)}\right)\cdots(2.2.4.44)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,q_{c9}(t)}{\mathrm{d}\,t}=\left(\frac{q_{c8}(t)}{r_8\times c_8}-\frac{q_{c9}(t)}{r_8\times c_9(t)}\right)+\left(-\frac{q_{c9}(t)}{r_9\times c_9(t)}+\frac{p_{c1}(t)}{r_9}\right)\cdots(2.2.4.45)$$

## 3　計算方法と計算結果

本章では（2.2.4.28）～（2.2.4.45）の解を数値解析で算出する．この数値解析の際に（2.2.4.28）～（2.2.4.45）の定数の値を決定する．この決定した定数は本章に掲載している解の特性の図 3.1～図 3.16 を計算する際に使用した．これらの定数を決定する際には，各パラメータに値を与えて微分方程式の解を求め，その解の特性――主に値と波形を観察した――の観察をして決定した．

本章で使う連立微分方程式群は，収縮期と拡張期に分けている．収縮期で使う連立微分方程式は（2.2.4.28）～（2.2.4.36）である． 拡張期で使う連立微分方程式は（2.2.4.37）～（2.2.4.45）である．

図 3.1～図 3.16 に本論文の計算結果としての特性図を載せている．これらの特性図で使っている各記号の意味を挙げる．

容積
左心室：nqc1，上行大動脈：nqc2，
右心房：nqc5，右心室：nqc6，
左心房：nqc9,

内圧
左心室：nvc1，上行大動脈：nvc2，
右心房：nvc5，右心室：nvc6，
左心房：nvc9,

これらの変数の値は，シミュレーションにおける計算結果の値を使って算出した有限フーリエ解析による式の値である．

シミュレーションと標準的な測定値から（3.1）と（3.2）の時不変型集中定数の値を決定した．図 3.1～図 3.16 の特性はこれらの値を使ったときの計算結果である．

$$\left.\begin{array}{l} c_2 = 115.7\times10^{-3}, c_3 = 660.3\times10^{-3}, c_4 = 4.0 \\ c_7 = 0.07, c_8 = 2.0 \\ r_2 = 21.4\times10^{-3}, r_3 = 878.6\times10^{-3}, r_4 = 151.4\times10^{-3} \\ r_7 = 70.0\times10^{-1}, r_8 = 80.0\times10^{-3} \end{array}\right\}\cdots(3.1)$$

（3.1）の時不変型集中定数の各値は図 3.1～図 3.16 を算出する際に使用した．（2.2.2.5）と（2.2.3.5）からおおよその各部位の定数値を算出し，その後，数値解析の微分方程式の解を観察して（3.1）を決定した．これらの時不変型集中定数の値は左心室部の圧と容積の計算結果や他の心臓−血管系の波形に大きく影響を与えるものではなかった．

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 7\times10^{-5}, r_5 = 1\times10^{-4} \\ r_6 = 1\times10^{-4}, r_9 = 7\times10^{-5} \end{array}\right\}\cdots(3.2)$$

（3.2）として計算を行った．これらの，定数は特に左心室部の内圧の精度に影響を与える．著者の計算環境に依存するために，（3.2）と各関数の項数には規制があった．

数式処理言語として，Mathematica3.0 Students Version を利用した．命令は NDSolve 命令による For 命令を利用した繰り返し計算である．本章の計算結果は，100 回程度の繰り返し計算で得られる．収縮期は，0.32[s]間とした．総血液量の初期値は，5600[ml]とした．シミュレーション前の血流量の平均値は，5600ml/min とした．大気圧は 800[mmHg]とした．

本論文のヒト左心室の容積と内圧の測定値は，それぞれ 88 個であり，精度は小数点以下 1 桁である．測定値から，有限フーリエ解析により時変型コンプライアンスと 0[mmHg]に対する左心室部圧の式を計算した．シミュレーションでは，左心室部圧の有限フーリエ解析による式の高調波は，cos 波が第 44 高調波，sin 波が第 43 高調波までである．左心室部の時変型コンプライアンスの有限フーリエ解析による式の高調波は，余弦波が第 24 高調波，正弦波が第 25 高調波までである．

右心室部の圧の値は，左心室部圧の測定値の n（n は，実数とする．）＜１倍として計算した 88 個の値を利用した．本論文の計算は n=0.8 である．シミュレーションでは，右心室部圧の有限フーリエ解析による式の高調波は，cos 波が第 44 高調波，sin 波が第 43 高調波までである．
容積は左心室部と同じものを利用している．シミュレーションでは，右心室部の時変型コンプライアンスの高調波は，cos 波及び sin 波が第 7 高調

波までである．

心室部の時変型コンプライアンスの精度は，その心室部の容積の精度に影響を与える．コンプライアンスの（2.2.1.1）は容積値を（2.2.1.5）と（2.2.1.6）を加算した値で割っている．このことから，(2.2.1.6) よりも十分大きな（2.2.1.5）である環境における（2.2.1.1）の波形は容積の波形と類似の波形である．ただし，(2.2.1.5) がほぼ定数の場合である．このことは，図 3.1 と図 3.2 での心室部のコンプライアンスの波形に見ることができる．

心房のコンプライアンスも同様に心房の容積の波形に類似の波形になると推定した．しかし，心房の容積の測定値は本研究では用意していない．本論文では，図 2.3 の心臓周期の時間関係から容積の変化について推定をした．収縮期には心房の血液量は減少する．弛緩期には心房の血液量は増加する．この考察から図 3.1 と図 3.2 では心房部のコンプライアンスの特性図をモデリングしている．0.7 秒から 0.8 秒の約一秒間は収縮期とした（図 2.3 参照）．

図 3.3 に載せた特性は，実線が測定値から計算した有限フーリエ解析による式の特性である．左心室容積の 88 個の計算したモデルの各値，と測定値のフーリエ解析の式との差が零になる平均的な桁は，小数点以下 1～2 桁程度の確認はできた．

図 3.4 に載せた特性は，実線が測定値から計算した有限フーリエ解析による式の特性である．左心室部内圧の 88 個の計算したモデルの各値，と測定値のフーリエ解析の式との差が零になる精度は，最高精度で小数点以下２桁である．これらの 88 個の値の差が零になる平均的な桁は，小数点以下３桁程度の確認はできた．

図 3.5 には右心室の圧特性を載せている．点線は計算結果である．実線は数学的モデルの記述で右心室の圧特性である仮想点の関数の特性である．図 3.6 は右心室の容積特性である．点線はシミュレーションの計算結果である．実線は左心室の容積の測定値である．左心室の測定値と計算結果の特性には，ずれが生じていることがわかる．

図 3.7 と図 3.8 には心房部の圧特性を載せている．波形は一般の生理学書に載せているものと比較すると著しく異なっている．図 3.9 と図 3.10 には心房部の容積特性を載せている．この容積特性は，考察によって著者が推定したものと類似の波形が現れている．

図 3.11 に載せた特性は，シミュレーションの計算結果の左心室部内圧と上行大動脈部の特性である．心臓弁が閉じる時に上行大動脈の波形にも，図 3.11 の $t$=0.32[s]あたりに現れている特性と類似のものがある．

図 3.12 は容積の特性である．コンプライアンスは定数で，動脈の特性に類似の波形が得られる．

図 3.13～図 3.16 は数学的モデルの総血液量の変化を算出した．図 3.13～図 3.14 は，総血液量 5600[ml]に対する差として計算をしている．図 3.15～図 3.16 は，総血液量 6200[ml]に対する差として計算をしている．これらの図での For 命令の繰り返し回数は 50 回と 500 回の場合のものを載せている．

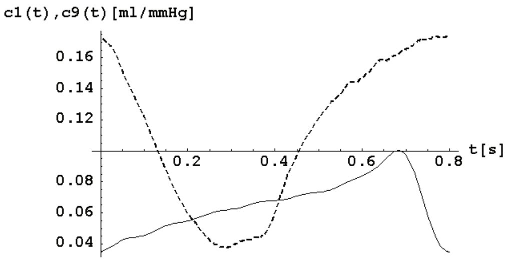


図 3.1　コンプライアンスの波形
点線は左心室，実線は左心房

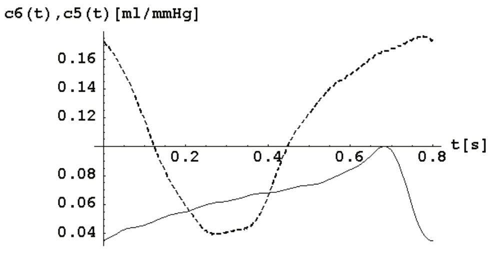


図 3.2　コンプライアンスの波形
点線は右心室，実線は右心房

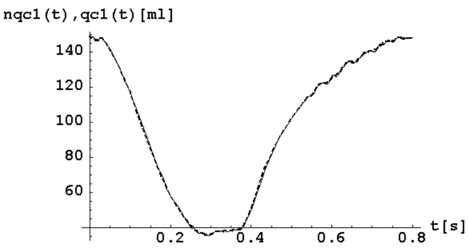


図 3.3　左心室の容積
点線は計算結果，実線は測定値

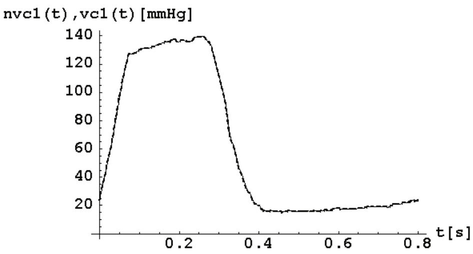


図 3.4　左心室の内圧
点線は計算結果，実線は測定値

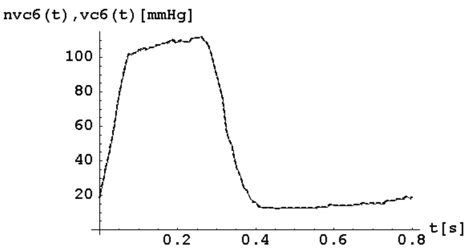


図 3.5　右心室の内圧
点線は計算結果，実線は仮想点

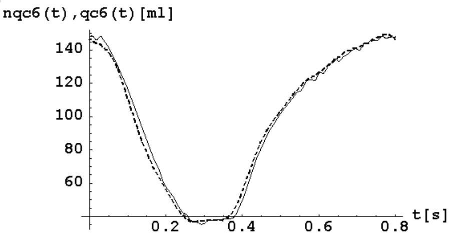


図 3.6　右心室の容積
点線は計算結果，
実線は左心室の測定値

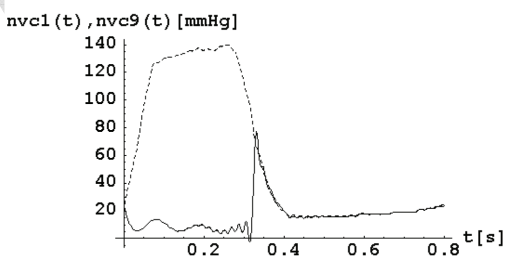


図 3.7　c1(t)，c9(t)の血圧
点線は c1(t)，実線は c9(t)

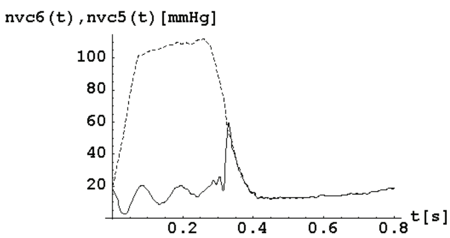


図 3.8　c6(t)，c5(t)の血圧
点線は c6(t)，実線は c5(t)

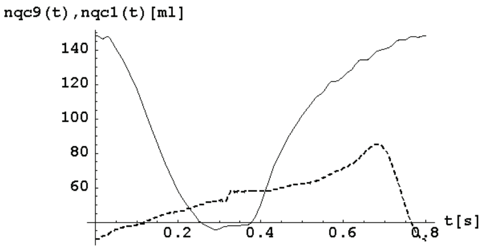


図 3.9　 c9(t)，c1(t)の容積
点線は c9(t)，実線は c1(t)

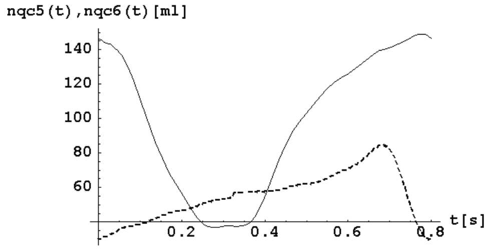


図 3.10　c5(t)，c6(t)の容積
点線は c5(t)，実線は c6(t)

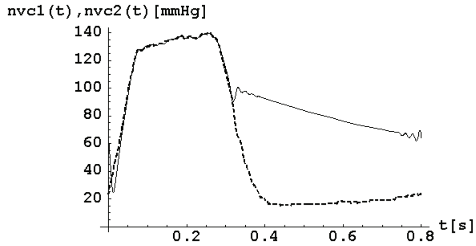


図 3.11　c1(t)，c2 の血圧
点線は c1(t)，実線は c2

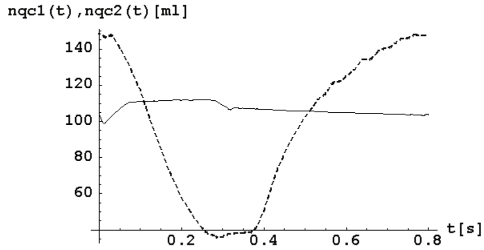


図 3.12　 c1(t)，c2 の容積
点線は c1(t)，実線は c2

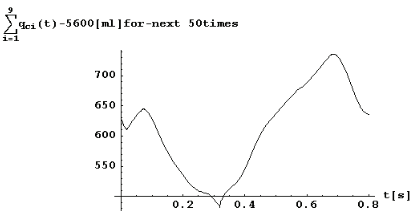


図 3.13　総血液量の変化
初期値の総血液量：5600[ml]
繰り返し回数　　：50 回

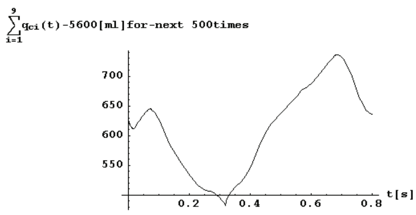


図 3.14　総血液量の変化
初期値の総血液量：5600[ml]
繰り返し回数　　：500 回

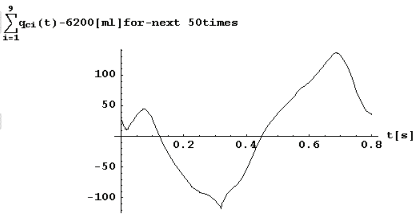


図 3.15　総血液量の変化
初期値の総血液量：6200[ml]
繰り返し回数　　：50 回

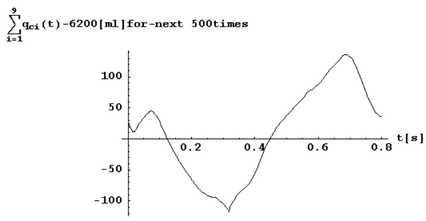


図 3.16　総血液量の変化
初期値の総血液量：6200[ml]
繰り返し回数　　：500 回

# 4　考察

## 4.1　誤差についての考察

### 4.1.1　左心室部の考察

３章の結果で論じている心室内圧の誤差値の計算は（4.1.1.1）と（4.1.1.2）である．これらの式に記述されている変数の意味は次のようになる．左心室の血液量 $q_{\mathrm{nc1}}(t)$はシミュレーションからの計算値である．また，左心室のコンプライアンス $c_1(t)$は測定値を使って算出した特性式である．左心室の測定圧から求めた $p_{\mathrm{c1}}(t)$と左心室の測定血液量から求めた $q_{\mathrm{c1}}(t)$を有限フーリエ解析で算出して真値としている．そして，次のような誤差値を計算している．

$$e_{q1}(t) = q_{nc1}(t) - q_{c1}(t) \cdots (4.1.1.1)$$

$$e_{p1}(t) = \frac{q_{nc1}(t)}{c_1(t)} - p_{c1}(t) \cdots (4.1.1.2)$$

（2.2.4.22）と（4.1.1.3）から（4.1.1.4）が導出できる．（2.2.4.22）と（4.1.1.4）から（4.1.1.5）が導出できる．また，（2.2.4.22）と（4.1.1.5）から（4.1.1.3）が導出できる．

$$p_{c1}(t) = \frac{q_{nc1}(t)}{c_1(t)} \cdots (4.1.1.3)$$

$$e_{q1}(t) = 0 \cdots (4.1.1.4)$$

$$e_{p1}(t) = 0 \cdots (4.1.1.5)$$

（4.1.1.1）の誤差値が（4.1.1.2）に含まれてくることが明らかである．（4.1.1.2）で右辺の第一項の分子である $q_{\mathrm{nc1}}(t)$が（4.1.1.1）の右辺の第二項と左辺で記述できる．

３章の計算は，左心室の圧と容積の測定値が小数点以下一桁であるのに対して，全測定値８８点で小数点以下一桁の精度で（4.1.1.1）と（4.1.1.2）の左辺を零にすることに成功している．さらに，全８８点の（4.1.1.1）と（4.1.1.2）の左辺の平均値を計算すると小数点以下三桁でも左辺を零にすることに可能な場合がある．

ただし，測定値より高い精度の場合の（4.1.1.1）と（4.1.1.2）の計算では数式処理言語の数値を使っている．これらの値は有限フーリエ解析の式に記述されている SIN 関数, COS 関数及びπの値である．これらの値の精度は，数式処理言語 MATHEMATICA FOR STUDENTS version3.0 のもつ精度の影響である．

連立微分方程式の解 $q(t)$の曲線を描くことができる．この曲線は，（2.2.4.24）～（2.2.4.27）に記述している $p_{\mathrm{c1}}(t)$，$p_{\mathrm{c6}}(t)$の値が本論文の解の曲線を表わす要因になっていることを著者は，考える．シミュレーションで使った連立微分方程式についての考察を 4.9 で論じている．

時変型の圧−容積特性係数は，その定義（4.1.1.6）から本論文の時変型コンプライアンスとの積が１であることが導出できる．本論文に掲載していない結果では（2.2.1.1）よりも（4.1.1.6）で計算した解の方が測定値の波形から大きく外れる傾向がある．

$$e(t) \equiv \frac{p(t)}{q(t)}\left[\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{mmHg}}\right] \cdots (4.1.1.6)$$

### 4.1.2　右心室部・心房部部・上行大動脈部の考察

図 3.6 での左心室容積特性と計算結果の右心室部容積特性がずれている．このずれは，右心室部コンプライアンスの関数の項数からの大きな影響が与えられているものと著者は考える．ある一定の項数までは，項数が増えることで測定値との一致する点数が増加する傾向があるものと著者は考える．右心室部内圧の関数 $p_{\mathrm{c6}}(t)$の影響によって図 3.5 の特性が得られている．この関数の項数を減少させることで，より仮想点との一致する算出点を減らすことが

できる場合を著者は考える．

図 3.5 の右心室の内圧は，計算する際の仮定したｎの値が不適切なために実測データとは著しく異なる結果となった．著者が右心室のデータを持っていなく，著者が判断を間違えたことに依存する計算結果である．3 章で使用した左心室のデータの場合は，n=0.2 程度で生理学書での一般的な右心室の内圧のレンジとなることを著者は考える．

心房部の内圧特性を図 3.7 と図 3.8 に載せている．この心房部の特性は，血流量を生じさせる程度の心室との圧差は計算結果に現れているものと著者は考える．しかし，より正確な波形を得るためには，この圧差は研究を要する問題点である．心房部の容積は著者が推定で描いた関数とほぼ一致したものが得られた．心房部のコンプライアンスを算出する際の容積特性を改善することで心房部の容積の計算結果を改善できるものと著者は考察する．

図 3.11 に上行大動脈部の内圧特性を載せている．拡張期での内圧は，約 0.32 秒辺りの値に上に凸の特性が現れている．また，実際のものよりも，約 0.55 秒以降の内圧の値は低いものと著者は考える．拡張期での上述の凸の特性の出現以降の曲線の傾きが，実際のものは，より緩やかであるものと著者は考える．

### 4.1.3 総血液量について考察

小数点以下一桁までを議論の対象とした場合を論じる．（4.1.3.1）の第一項は左心室の圧と容積の測定値と完全に一致した計算結果を得ている．このことから左心室部の容積は測定値のそれと同じものとしてみなせる．右心室部の容積の計算結果は図 3.6 のように左心室の容積の測定値と計算結果に異なる容積特性を確認できる．３章のシミュレーションの結果では，$r_5$ と $r_6$ の逆数と右心室部の圧特性との積から計算される総血液量の変動がある．このことはシミュレーションで使った（2.2.4.28）～（2.2.4.45）でも見ることができる．（2.2.4.28）～（2.2.4.45）の総和を，それぞれの心時相――収縮期と拡張期――で計算することで説明できると著者は考える．

（4.1.3.1）の右辺では内圧とコンプライアンスをそれぞれ決定することで（4.1.3.1）の左辺を決定できる．（4.1.3.1）は図 2.1 で計算したものである．コンプライアンスの個数を n 個にした場合は（4.1.3.2）のように記述できるものとする．このとき，（4.1.3.3）が計算できる．数学での証明は付録１に掲載した．

$$\sum_{i=1}^{9} q_i = c_1(t)\times p_1(t) + c_2 \times p_2(t)$$
$$+ c_3 \times p_3(t) + c_4 \times p_4(t)$$
$$+ c_5(t)\times p_5(t) + c_6(t)\times p_6(t)$$
$$+ c_7 \times p_7(t) + c_8 \times p_8(t)$$
$$+ c_9(t)\times p_9(t) \cdots (4.1.3.1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\times p_i(t) \cdots (4.1.3.2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} q_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\times p_i(t) \cdots (4.1.3.3)$$

特性図 3.13～図 3.16 で理論的には次のようなことが考えられる．図 3.13～図 3.16 には小数点以下一桁以外の小数点以下の値による影響も含まれている．このことは特に $r_1$，$r_5$ ，$r_6$ と $r_9$ の逆数および心室部の内圧値との積から特性図 3.13～図 3.16 の総血液量の変動を説明できる．このことは（2.2.4.28）～（2.2.4.45）の総和をそれぞれの心時相――収縮期と拡張期――で計算することで説明できると著者は考える．３章の計算結果では初期値の総血液量が 5600[ml]であろうとも計算結果の血液量

は 6200[ml]を前後することになる．なお，シミュレーションの繰り返し回数には依存しない様子が計算結果の図 3.13～図 3.16 から考察できる．

#### 4.1.4 物理的モデルの誤差

図 2.1 が，ここまで本論文で使用した物理的モデルの循環系の回路モデルである．図 2.1 はコンプライアンス，流れの抵抗，スイッチおよび波形操作回路――あるいは整流素子――で物理的モデルを構成している．図 2.1 より厳密な物理的モデルとしてはインダクタを導入したものが考えられる．一般的にはインダクタで慣性の影響を表わそうとする考えである．しかし，本論文では 4.10.2 で図 2.1 よりも厳密な物理的モデルについて考察する．ただし，本論文ではインダクタは扱わない．

動脈系にみられる歴史上のモデルは

- 純抵抗モデル
- 集中定数モデル（ウィンドケッセル理論が代表格とされている）
- 線形分布定数モデル
- 非線形分布定数モデル

などを挙げることができる．

本論文の物理的モデルの動脈系を構成する要素はコンプライアンス（2.2.3.5）と流れの抵抗（2.2.2.5）である．ウィンドケッセル理論による集中定数回路モデルも動脈の容積コンプライアンスと末梢抵抗の２つの要素で記述される．ここで，オットー・フランク（O.Frank）のウィンドケッセル理論を記述する一般的なモデルで使う各要素との異なりを指摘できる．

２章のモデルでは，内圧は（2.2.1.2）の左辺で計算するものである．一方，一般的な回路モデルの内圧は（2.2.1.3）の左辺で計算できる大気圧に対するものである．この内圧の異なりは重要であり，計算結果に大きな違いを与えるものである．また，（2.2.1.1）の定義では（2.2.1.2）の左辺ならば，一般的な日本のような環境では分母を零に取ることは無い．しかし，（2.2.1.3）の左辺で（2.2.1.1）を計算した場合は，一般的な日本のような環境では分母を零に取る場合は在るものと著者は考える．
図 2.1 で使っている心臓部を構成している時変型コンプライアンスは（2.2.1.1）である．一般には心臓部のコンプライアンスは時変型で記述する方が時不変型で記述するよりも適するものとして説明されている．しかし，一般の循環系の集中定数回路モデルで使うコンプライアンスは $\varepsilon$－近傍で保証される容積コンプライアンスによるものである．このコンプライアンスの異なりは，回路モデルの記号では区別がないように図 2.1 で表わしている．このコンプライアンスの異なりは，数学的モデルの記述で現れる．

図 2.1 では心臓弁にスイッチを使っている．スイッチよりも厳密な心臓弁のモデルとしては可変コンダクタンス [4)] を提案した．この点では，現在も十分な証明を与えていない．しかし，著者が提案した可変コンダクタンスの心臓弁のモデルは簡単なモデルであり，厳密なモデルではない．

図 2.1 では静脈弁に波形操作回路――あるいは整流素子――を使っている．波形操作回路や整流素子は回路方程式を導出する際に，方程式に記号で BC1 の記述をしないで微分方程式を記述できた．

$r_1$，$r_5$ ，$r_6$ と $r_9$ は収縮期と拡張期の一方のみで数学的モデルの記述に使われている．収縮期の記述では $r_1$ と $r_6$ が使われる．拡張期の記述では $r_5$ と $r_9$ が使われる．3 章の計算結果では，これらの抵抗は心室部の内圧の精度に影響を与えることが確認できた．
これらの時不変型流れの抵抗 $r_1$，$r_5$ ，$r_6$

と $r_9$ を小さくする．このことで左心室の内圧の計算結果が左心室の内圧の測定値に近づく．

分布定数回路モデルと集中定数回路モデルとの理論的異なりは脈波伝播速度の計算に依存している．しかし，分布定数回路モデルが集中定数回路モデルよりも精度が高いことの絶対性は本研究論文の計算結果からも否定できる．モデルの精度が本質的な場合は，分布定数回路モデルよりも本研究論文の理論のほうが優れた特性を示すことがある．

## 4.2　コンプライアンスについての考察

本論文のコンプライアンスの数学的モデルは（2.2.1.1），（2.2.3.1）および（2.2.3.5）である．（2.2.1.1）と（2.2.3.1）によりコンプライアンスを定義している．これらのコンプライアンスの記述は $\varepsilon$ −近傍で保証のある容積コンプライアンスの定義とは異なる．日本のような標準的な大気圧の環境では本論文のコンプライアンスの分母はゼロになることは一般にない．

### 4.2.1　コンプライアンスの導出についての考察[5)]

（4.2.1.1）は機械系の直線運動系のコンプライアンスを時間の関数として定義したものである．（4.2.1.1）の右辺の分母は力であり，分子は位置情報である．（4.2.1.1）の右辺では力と位置情報の関係を与えている．（4.2.1.1）の右辺の分子が零ならば（4.2.1.1）の左辺は零になることは明らかである．（4.2.1.1）を質点で扱う場合には（4.2.1.1）の右辺の力はその質点の重心に作用するものとする．

$$c_{\mathrm{m}}(t) \equiv \frac{x(t)}{f(t)}, (f(t) \neq 0) \cdots (4.2.1.1)$$

（4.2.1.2）の左辺は力である．（4.2.1.2）の右辺は法線応力とその断面積である．（4.2.1.1）と（4.2.1.2）から（4.2.1.3）のように法線応力と位置情報との関係を得る．

$$f(t) = p(t,x) \times S(t,x) \cdots (4.2.1.2)$$

（4.2.1.3）は質点がつりあいの状態にあり，加速度を持たない場合にも成立する．（4.2.1.3）では体積と法線応力との関係を記述していない．体積と法線応力との関係を記述した関数から，対象の体積の変化を法線応力で説明できる．このことで，法線応力で物体の体積の追跡あるいは操作を期待できる．体積で物体の慣性質量との関係を与えることができる．慣性質量は密度，エネルギーおよび力との関係を物理学で与えることができる．ここで考察する体積は３次空間で与えられるものに限定する．３次空間の体積を直線運動系で記述することは，体積を向きのない量として扱うことで容易になるものと著者は考える．

$$c_{\mathrm{m}}(t) = \frac{x(t)}{p(t,x) \times S(t,x)}, (f(t) \neq 0) \cdots (4.2.1.3)$$

次に，体積と位置情報の関係について（4.2.1.4）の運動方程式を使って考察する．（4.2.1.4）の左辺には質量を使って密度と体積の関係を記述できる．（4.2.1.5）は時間の関数の体積である．（4.2.1.6）では体積密度を質量と体積で与えている．

$$m \times \ddot{x}(t) = f(t) \cdots (4.2.1.4)$$

$$q(t) \cdots (4.2.1.5)$$

$$\rho = \frac{m}{q} \cdots (4.2.1.6)$$

（4.2.1.1）と（4.2.1.4）から（4.2.1.7）のように加速度をもつ運動をしている質点の慣性質量と位置情報の関係を得る．（4.2.1.6）と（4.2.1.7）から質点の体積と位置情報の関係を（4.2.1.8）のように記述できる．（4.2.1.8）では，法線応力と体積の関係を記述できていない．

$$c_{\mathrm{m}}(t) = \frac{x(t)}{m \times \ddot{x}(t)}, (\ddot{x}(t) \neq 0) \cdots (4.2.1.7)$$

$$c_{\mathrm{m}}(t)=\frac{x(t)}{\rho\times q(t)\times\ddot{x}(t)}\cdots(4.2.1.8)$$

(4.2.1.9)の左辺は線密度である．(4.2.1.7)と（4.2.1.9）から質点の長さと位置情報の関係を（4.2.1.10）のように記述できる．

$$\rho_{l}=\frac{m}{l},(l\neq 0)\cdots(4.2.1.9)$$

$$c_{\mathrm{m}}(t)=\frac{x(t)}{\rho_{l}\times l\times\ddot{x}(t)},(\ddot{x}(t)\neq 0)\cdots(4.2.1.10)$$

（4.2.1.2）と（4.2.1.4）から（4.2.1.11）を記述する．(4.2.1.11）を（4.2.1.6）を使って（4.2.1.12）のように書換える．（4.2.1.12）を（4.2.1.13）のように記述する．(4.2.1.13）では左辺に法線応力を記述し，右辺では体積を記述している．（4.2.1.13）の右辺の体積を除いた記号を纏まったものとして扱うために (4.2.1.14) のように記述する．(4.2.1.13) と (4.2.1.14) から（4.2.1.15）のように記述できる．（4.2.1.15）は運動方程式に法線応力が存在することを仮定している他は，特別な条件を必要とせずに導出できる．(4.2.1.15) の法線応力を接線応力に変えても同様のものを記述できる．(4.2.1.15）の応力とコンプライアンスで体積の値は決定できる．（4.2.1.14）では断面積・体積密度および加速度の関係をコンプライアンスで記述できる．

$$p(t,x)=\frac{m\times\ddot{x}(t)}{S(t,x)},(S(t,x)\neq 0)\cdots(4.2.1.11)$$

$$p(t,x)=\frac{\rho\times q(t)\times\ddot{x}(t)}{S(t,x)}\cdots(4.2.1.12)$$

$$p(t,x)=\frac{\rho\times\ddot{x}(t)}{S(t,x)}\times q(t)\cdots(4.2.1.13)$$

$$c(t,x)=\frac{S(t,x)}{\rho\times\ddot{x}(t)},(\rho\times\ddot{x}(t)\neq 0)\cdots(4.2.1.14)$$

$$c(t,x)=\frac{q(t)}{p(t,x)},(p(t,x)\neq 0)\cdots(4.2.1.15)$$

（4.2.1.16）と（4.2.1.17）を仮定すると（4.2.1.13）は（4.2.1.18）のように記述できる．(4.2.1.19）を使うと（4.2.1.18）から（4.2.1.20）が記述できる．

$$p(t)=p(t,x)\cdots(4.2.1.16)$$

$$S(t)=S(t,x)\cdots(4.2.1.17)$$

$$p(t)=\frac{\rho\times\ddot{x}(t)}{S(t)}\times q(t)\cdots(4.2.1.18)$$

$$c(t)=\frac{q(t)}{p(t)},(p(t)\neq 0)\cdots(4.2.1.19)$$

$$c(t)=\frac{S(t)}{\rho\times\ddot{x}(t)},(\rho\times\ddot{x}(t)\neq 0)\cdots(4.2.1.20)$$

（4.2.1.18）の右辺の体積は負値をとらない．（4.2.118）の左辺が負の場合は（4.2.1.20）の右辺が負であることは（4.2.1.18）から明らかである．このことからも（2.2.1.20）の左辺が負値を得ることは明らかである．(4.2.1.20) の右辺では，加速度が負値を取り得る．(4.2.1.20）の右辺の分子の断面積が零である場合は（4.2.1.20）の左辺も零である場合は明らかである．

（4.2.1.21）をコンプライアンスの定義として考察する．(4.2.1.21）では位置情報 x が記述されている応力のために（4.2.1.21）の左辺も二変数の関数として記述されている．(4.2.1.21）の位置情報は直線方向の位置情報であるので，各直線方向によって異なる位置情報の変数で記述することになる．(4.2.1.21）の右辺の分子は時間を変数とする一変数の関数である．質点に作用する力は重心に作用することを仮定すると，(4.2.1.21）の応力が作用する位置はその質点の重心である．このために，(4.2.1.21）の位置情報は一般の質点の問題に対する計算では使用しないことが考えられる．このことから，一般の質点の問題では（4.2.1.21）は（4.2.1.19）のように記述することが可能であると著者は考える．

$$c(t,x) \equiv \frac{q(t)}{p(t,x)}, (p(t,x) \neq 0) \cdots (4.2.1.21)$$

4.2.1 では応力で 2 つのコンプライアンスを上述で記述した．しかし，2006 年現在の生理学では，大気圧に対する内圧あるいは血圧を使って生体の評価を行う方が一般的である．以下では生理学でも論じられている，大気圧に対する内圧で定義したコンプライアンスについて考察する．このためには，近似と近傍の概念が必要になる．ここから，4.2.1 の最後まで，体積と応力で決定される曲線上の一点の ε −近傍における増加分の比のコンプライアンスを考察する．ここでの応力は，大気圧に対する内圧だけでなく，物理学での一般的な応力を意味する．

Taylor 級数で体積を（4.2.1.22）のように記述できるものとする．(4.2.1.22）の左辺は応力の一変数の関数として体積を記述している．（4.2.1.22）の左辺の関数は（4.2.1.23）の左辺が（4.2.1.24）を満足しているものである．（4.2.1.22）から（4.2.1.25）を記述できる．（4.2.1.26）のように定めると，(4.2.1.27）の ε −近傍で（4.2.1.26）の右辺が成立することは周知である．(4.2.1.28）を満足する場合は，応力の微小変動領域であるものと解釈できる．（4.2.1.28）の近似が成立する場合は，（4.2.1.25）で右辺の第二項以降の和が零に十分に近いものとして考えることにする．（4.2.1.28）の左辺は ε −近傍で成立するもので，右辺は（4.2.1.26）の右辺の近似式である．

$$q(p) = q(p_0) + \frac{q'(p_0)}{1!}(p - p_0) + \frac{q''(p_0)}{2!}(p - p_0)^2 + \cdots + \frac{q^{(n)}(p_0)}{n!}(p - p_0)^n + \cdots \cdots (4.2.1.22)$$

$$R_n(q_0, q) = q(p) - \left\{ q(p_0) + \frac{q'(p_0)}{1!}(p - p_0) + \frac{q''(p_0)}{2!}(p - p_0)^2 + \cdots + \frac{q^{(n)}(p_0)}{n!}(p - p_0)^n \right\} \cdots (4.2.1.23)$$

$$\lim_{n \to \infty} R_n(q_0, q) = 0 \cdots (4.2.1.24)$$

$$\frac{q(p) - q(p_0)}{(p - p_0)} = q'(p_0) + \frac{q''(p_0)}{2!}(p - p_0) + \cdots + \frac{q^{(n)}(p_0)}{n!}(p - p_0)^{n-1} + \cdots, (p \neq p_0) \cdots (4.2.1.25)$$

$$q'(p) = \frac{\mathrm{d}q(p)}{\mathrm{d}p} = \lim_{\xi \to p} \frac{q(\xi) - q(p)}{\xi - p} \cdots (4.2.1.26)$$

$$|\xi - p| < \varepsilon, \varepsilon > 0 \cdots (4.2.1.27)$$

$$q'(p_0) \approx \frac{q(p) - q(p_0)}{(p - p_0)} \cdots (4.2.1.28)$$

（4.2.1.29）は生理学で紹介されているコンプライアンスである．(4.2.1.30）を容積の増加分として，(4.2.1.31）を内圧の増加分とする．このとき，（4.2.1.29）を（4.2.1.32）のように記述できるものとする．生理学では（4.2.1.29）の内圧は大気圧に対する内圧を使用することが，著者の調査では一般的である．

$$\text{コンプライアンス} = \frac{\text{容積の増加分}}{\text{内圧の増加分}} = \text{伸展性} \times \text{初期の容積} \cdots (4.2.1.29)$$

$$\Delta q \cdots (4.2.1.30)$$

$$\Delta p \cdots (4.2.1.31)$$

$$(4.2.1.29)\text{の左辺} = \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdots (4.2.1.32)$$

（4.2.1.30）と（4.2.1.31）を（4.2.1.33）および（4.2.1.34）のように定めると（4.2.1.32）は（4.2.1.35）のように記述できる．(4.2.1.33) の右辺の関数 $q$ は容積で，その関数の変数 $p$ は内圧である．(4.2.1.35)

は（4.2.1.36）が成立する場合に定義できる．ただし，一般的には，(4.2.1.35）の分子の容積の関数は定義域で連続であるものと著者は考える．(4.2.1.28）の右辺は（4.2.1.35）と同様の数学的記述である．このことから（4.2.1.28）の左辺はコンプライアンスの近似式であると言える．

$$\Delta q = q(p_1) - q(p_0) \cdots (4.2.1.33)$$

$$\Delta p = p_1 - p_0 \cdots (4.2.1.34)$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q(p_1) - q(p_0)}{p_1 - p_0} \cdots (4.2.1.35)$$

$$p_1 \neq p_0 \cdots (4.2.1.36)$$

（4.2.1.35）では，媒介変数を導入した計算ではない．媒介変数を導入して容積と内圧の一対一の対応関係を与えた場合は（4.2.1.29）は次のように計算できる．（4.2.1.37）で（4.2.1.30）と（4.2.1.31）を（4.2.1.38）と（4.2.1.39）で定めると，（4.2.1.32）の右辺は（4.2.1.40）となる．（4.2.1.40）が定義できるならば（4.2.1.41）が成立する．媒介変数を $t$ として容積と内圧の曲線を描けるものとする．一般的には，媒介変数 $t$ を時間とすることができる．このとき，(4.2.1.37）の最小値に対応する容積と内圧の曲線上の点を A とする．さらに，（4.2.1.37）の最大値に対応する容積と内圧の曲線上の点を B とする．この点 A と点 B を線分で結ぶと弦 AB が描ける．（4.2.1.40）の右辺はその弦 AB の勾配である．

$$t_0 \leq t \leq t_1 \cdots (4.2.1.37)$$

$$\Delta q = q(t_1) - q(t_0) \cdots (4.2.1.38)$$

$$\Delta p = p(t_1) - p(t_0) \cdots (4.2.1.39)$$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{q(t_1) - q(t_0)}{p(t_1) - p(t_0)} \cdots (4.2.1.40)$$

$$p(t_1) \neq p(t_0) \cdots (4.2.1.41)$$

（4.2.1.35）および（4.2.1.40）では（4.2.1.29）の伸展性を記述していない．ここでは，(4.2.1.28) の伸展性を考察する．

（4.2.1.28）を（4.2.1.42）のように書換える．このとき，(4.2.1.43）を初期の容積として，(4.2.1.42）を（4.2.1.29）と比較する．この比較から，(4.2.1.44) を (4.2.1.29) の伸展性と解することができる．（4.2.1.35）の伸展性も数学的記述は（4.2.1.44）と同様になることは明らかである．(4.2.1.40）の場合も（4.2.1.44）と同様の方法で伸展性に対応する数学的記述が導出できる．

$$q'(p_0) \approx \frac{\dfrac{q(p) - q(p_0)}{q(p_0)}}{(p - p_0)} \times q(p_0) \cdots (4.2.1.42)$$

$$q(p_0) \cdots (4.2.1.43)$$

$$\frac{\dfrac{q(p) - q(p_0)}{q(p_0)}}{(p - p_0)} \cdots (4.2.1.44)$$

(4.2.1.45) は平均値の定理を (4.2.1.22) の左辺で計算したものである．(4.2.1.45）は（4.2.1.22）の左辺が（4.2.1.46）に於いて連続で，(4.2.1.47）で微分可能であるものと仮定する．（4.2.1.48）で与えられる（4.2.1.45）の右辺は，区間（4.2.1.46）内の一点における増加率である．(4.2.1.45）の左辺は区間（4.2.1.46）内の平均増加率である．（4.2.1.45）が成立する場合は，（4.2.1.46）のすべての点に対して成立するわけではない．このことから，(4.2.1.46) を心臓周期の一周期の区間とした場合には，(4.2.1.45）でその区間の全体における体積の変化を記述できない．(4.2.1.45）の容積の関数は，(4.2.1.27）の ε－近傍に含まれるすべての応力 $p$ の値に対して定義されていることが前提である．

$$\frac{q(p_1) - q(p_2)}{p_1 - p_2} = q'(\xi), p_1 < \xi < p_2 \cdots (4.2.1.45)$$

$$[p_1,\ p_2] \cdots (4.2.1.46)$$

$$(p_1,\ p_2) \cdots (4.2.1.47)$$

$\xi \cdots (4.2.1.48)$

（4.2.1.45）では媒介変数を使用していない．（4.2.1.45）の平均値の定理を拡張して，（4.2.1.49）では媒介変数を使って計算している．（4.2.1.40）のように媒介変数 $t$ を使って曲線を描く場合について（4.2.1.49）の定理がある．（4.2.1.49）の左辺の分母と分子の関数は（4.2.1.50）で連続であり，（4.2.1.51）で微分可能である．（4.2.1.49）では，左辺は（4.2.1.52）を満足し，右辺の分母と分子は同時に零にならないことが前提である．（4.2.1.49）の左辺の体積と応力の関数が区分的に滑らかとする．このとき，右辺の分母と分子が媒介変数 $t$ のどの値においても同時に零でない場合は，この曲線は区分的に滑らかである．

$$\frac{q(t_1)-q(t_2)}{p(t_1)-p(t_2)}=\frac{q'(\tau)}{p'(\tau)}, t_1<\tau<t_2 \cdots (4.2.1.49)$$

$[t_1, t_2] \cdots (4.2.1.50)$

$(t_1, t_2) \cdots (4.2.1.51)$

$p(t_1) \neq p(t_2) \cdots (4.2.1.52)$

（4.2.1.49）の増加量を区間で計算しているが，今度は $\varepsilon$ −近傍で連続である場合について考察する．このために，平面座標上で血液量と応力の曲線が存在することを前提とする．心臓あるいは血管内の血液量と応力の対応を（4.2.1.53）で記述する．方程式（4.2.1.53）は一般には一つの曲線を表す．（4.2.1.54）が（4.2.1.53）によって陰伏的に定められる場合について考察する．平面座標上で点（4.2.1.55）を含むある領域Ａで（4.2.1.53）を考える．この領域Ａでは（4.2.1.53）と（4.2.1.56）は連続であるとする．この領域Ａでは（4.2.1.57）が成立して，かつ（4.2.1.58）あるいは（4.2.1.59）が成立するならば（4.2.1.54）が一意的に定まることは数学では周知である．ここで，領域Ａで（4.2.1.59）が成立するものとする．このとき，（4.2.1.60）および（4.2.1.61）が成立することも周知である．

$f(p,q)=0 \cdots (4.2.1.53)$

$q=\psi(p) \cdots (4.2.1.54)$

$(p_0, q_0) \cdots (4.2.1.55)$

$f_{\mathrm{p}}, f_{\mathrm{q}} \cdots (4.2.1.56)$

$f(p_0, q_0)=0 \cdots (4.2.1.57)$

$f_{\mathrm{p}}(p_0, q_0) \neq 0 \cdots (4.2.1.58)$

$f_{\mathrm{q}}(p_0, q_0) \neq 0 \cdots (4.2.1.59)$

$q_0=\psi(p_0) \cdots (4.2.1.60)$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=-\frac{f_{\mathrm{p}}(p,q)}{f_{\mathrm{q}}(p,q)}, f_{\mathrm{q}} \neq 0 \cdots (4.2.1.61)$$

（4.2.1.61）は（4.2.1.54）の接線の方程式の傾きである．（4.2.1.61）を（4.2.1.29）のコンプライアンスとして解釈できる計算がある．このことは，次のように説明できる．（4.2.1.54）の第一階の導関数が存在する場合には，（4.2.1.62）のように記述できる．（4.2.1.63）では，（4.2.1.64）ならば（4.2.1.65）となる．このとき，（4.2.1.66）のように表すことにする．（4.2.1.66）の左辺は容積の増加分と解釈できるものとする．このとき，（4.2.1.67）の $\Delta p$ を内圧の増加分とする．（4.2.1.66）と（4.2.1.67）を前提にして（4.2.1.68）のように記述できる．（4.2.1.68）の左辺は（4.2.1.29）のコンプライアンスとなる．（4.2.1.68）の右辺で（4.2.1.69）の記述ができることは微積分学では周知のことである．（4.2.1.29）のコンプライアンスが（4.2.1.61）で記述できることを説明できた．

$$c_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} \cdots (4.2.1.62)$$

$\Delta q=\psi'(p) \times \Delta p+\varepsilon \times \Delta p,\ \Delta p \neq 0 \cdots (4.2.1.63)$

$\Delta p \to 0 \cdots (4.2.1.64)$

$\varepsilon \to 0 \cdots (4.2.1.65)$

$\mathrm{d}q=\Delta q=\psi'(p)\Delta p,\ \Delta p \to 0 \cdots (4.2.1.66)$

$\mathrm{d}p=\Delta p \cdots (4.2.1.67)$

$$\frac{\Delta q}{\Delta p}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\cdots(4.2.1.68)$$

$$c_{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=\lim_{\Delta p\to 0}\frac{q(p+\Delta p)-q(\Delta p)}{\Delta p}\cdots(4.2.1.69)$$

血液と応力の平面座標上での曲線上の点と一対一に対応を与えるために媒介変数 $t$ を導入する．この媒介変数を導入した場合で（4.2.1.69）について考察する．平面座標上で，媒介変数 $t$ を含む曲線族の方程式を（4.2.1.70）で記述する．（4.2.1.70）で血液量と応力の関係式の曲線を表すことにする．このとき，(4.2.1.71) と (4.2.1.72) は（4.2.1.70）の包絡線とする．（4.2.1.71）と（4.2.1.72）は媒介変数 $t$ を時間として，血液量（4.2.1.71）と応力（4.2.1.72）の関数を記述している．（4.2.1.73）が成立するとき，（4.2.1.74）を起点とし，（4.2.1.75）を終点とする．（4.2.1.71）と（4.2.1.72）で表現している曲線は，起点（4.2.1.74）から終点（4.2.1.75）までを連結した一つの曲線として扱える．この曲線上の点と媒介変数 $t$ の値は一対一に対応している．（4.2.1.76）と（4.2.1.77）はそれぞれ (4.2.1.71) と (4.2.1.72) の導関数である．（4.2.1.70），（4.2.1.76）および（4.2.1.77）から記述した（4.2.1.78）は（4.2.1.70）の接線の方程式である．（4.2.1.78）から（4.2.1.79）のように記述できる．

$$h(p,q,t)=0\cdots(4.2.1.70)$$

$$q=\eta(t)\cdots(4.2.1.71)$$

$$p=\kappa(t)\cdots(4.2.1.72)$$

$$t_0\le t\le t_1\cdots(4.2.1.73)$$

$$(\kappa(t_0),\eta(t_0))\cdots(4.2.1.74)$$

$$(\kappa(t_1),\eta(t_1))\cdots(4.2.1.75)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dot{\eta}(t)\cdots(4.2.1.76)$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\dot{\kappa}(t)\cdots(4.2.1.77)$$

$$h_{\mathrm{p}}\times\dot{\kappa}(t)+h_{\mathrm{q}}\times\dot{\eta}(t)=0\cdots(4.2.1.78)$$

$$-\frac{h_{\mathrm{p}}}{h_{\mathrm{q}}}=\frac{\dot{\eta}(t)}{\dot{\kappa}(t)},h_{\mathrm{q}}\ne 0,\dot{\kappa}(t)\ne 0\cdots(4.2.1.79)$$

（4.2.1.76），（4.2.1.77）および（4.2.1.79）から（4.2.1.80）が記述できる．（4.2.1.80）の右辺は (4.2.1.81) のように記述できる．（4.2.1.81）の右辺は（4.2.1.82）の右辺のように記述できる．（4.2.1.82）から（4.2.1.83）が記述できる．（4.2.1.83）の左辺の分母は，$t$ の $\varepsilon$ −近傍で成立して，その近傍では（4.2.1.77）が単調増加あるいは単調減少となる領域であることは明らかである．一方，（4.2.1.79）の左辺から（4.2.1.70）の正則点の近傍で，(4.2.1.83) の右辺は成立している．また，(4.2.1.83) の右辺からは（4.2.1.84）の関数が記述できることは周知である．

$$\frac{\dot{\eta}(t)}{\dot{\kappa}(t)}=\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}},\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\ne 0,\dot{\kappa}(t)\ne 0\cdots(4.2.1.80)$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\times\frac{1}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}},\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\ne 0\cdots(4.2.1.81)$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p},\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\ne 0\cdots(4.2.1.82)$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p},\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\ne 0\cdots(4.2.1.83)$$

$$q=\chi(p)\cdots(4.2.1.84)$$

（4.2.1.29）では，伸展性が記述されている．この伸展性を（4.2.1.69）の導出理論で計算すると（4.2.1.85）のように記述できる．（4.2.1.85）は（4.2.1.27）の $\varepsilon$ −近傍のみで考えるものである．一方，（4.2.1.44）は区間での伸展性を記述して

いるものと著者は考える.

$$\frac{c_{\mathrm{d}}}{q(p_0)}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}}{q(p_0)}=\frac{q'(p_0)}{q(p_0)},q(p_0)\neq 0\cdots(4.2.1.85)$$

### 4.2.2 質点系のコンプライアンスの計算

物理学では,流体を分子の集合として考えることができる.特に熱力学的変化による影響が無視できるならばそれら分子の集合を質点系として扱うことができる.以下では,流体に対して質点系の運動の物理学的な計算をしている.

n個の質点で構成される質点系を考える.質点に1からnまでの番号をつける.その質点系のi番目の質点に作用する外力を(4.2.2.1)で記述する.

$\mathbf{f_i}\cdots(4.2.2.1)$

質点系の並進運動について考える.i番目の質点の質量を(4.2.2.2)とする.i番目の質点の速度を(4.2.2.3)とする.i番目の質点の運動量は(4.2.2.4)とする.

$\mathrm{m}_i\cdots(4.2.2.2)$

$\mathbf{v_i}\cdots(4.2.2.3)$

$\mathrm{m}_i\boldsymbol{v_i}\cdots(4.2.2.4)$

(4.2.2.5)は質点系の全運動量である.(4.2.2.6)は運動量の原理を記述したものである.(4.2.2.6)の左辺は全運動量が時間とともに変化する割合を記述している.(4.2.2.6)の右辺は全外力の和を記述している.(4.2.2.6)ではこの全運動量の時間とともに変化する割合が全外力の和に等しいことを説明している.

$$\boldsymbol{p_v}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{m}_i\boldsymbol{v_i}\cdots(4.2.2.5)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p_v}}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f_i}\cdots(4.2.2.6)$$

(4.2.2.7)は質量中心を記述している.(4.2.2.8)の左辺は全質量である.(4.2.2.6)は(4.2.2.7)を使って(4.2.2.9)のように記述できる.(4.2.2.9)の右辺を(4.2.2.10)のように記述すると(4.2.2.9)は(4.2.2.11)のように記述できる.

$$\boldsymbol{r_c}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{m}_i\boldsymbol{r_i}}{\mathrm{m_c}}\cdots(4.2.2.7)$$

$$\mathrm{m_c}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{m}_i\cdots(4.2.2.8)$$

$$\mathrm{m_c}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r_c}}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f_i}\cdots(4.2.2.9)$$

$$\boldsymbol{f_c}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f_i}\cdots(4.2.2.10)$$

$$\mathrm{m_c}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r_c}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{f_c}\cdots(4.2.2.11)$$

(4.2.2.11)の空間の成分を(4.2.2.12)~(4.2.2.14)で記述する.各成分の方向は互いに直角であるものとする.

$$\mathrm{m_c}\frac{\mathrm{d}^2x_c}{\mathrm{d}t^2}=f_{\mathrm{xc}}\cdots(4.2.2.12)$$

$$\mathrm{m_c}\frac{\mathrm{d}^2y_c}{\mathrm{d}t^2}=f_{\mathrm{yc}}\cdots(4.2.2.13)$$

$$\mathrm{m_c}\frac{\mathrm{d}^2z_c}{\mathrm{d}t^2}=f_{\mathrm{zc}}\cdots(4.2.2.14)$$

(4.2.2.15)は質点系の各質点の質量,体積密度および体積の関係を記述したものである.(4.2.2.16)は全質量とその体積密度と体積の関係である.(4.2.2.15)と(4.2.2.16)を(4.2.2.8)に代入すると(4.2.2.17)を記述できる.(4.2. 2.17)は(4.2.2.18)に記述できる.

$\mathrm{m}_i=\rho_i\times q_i\cdots(4.2.2.15)$

$\mathrm{m_c}=\rho_{\mathrm{c}}\times q_{\mathrm{c}}\cdots(4.2.2.16)$

$$\rho_{\mathrm{c}}\times q_{\mathrm{c}}=\sum_{i=1}^{n}\rho_i\times q_i\cdots(4.2.2.17)$$

$$\rho_{\mathrm{c}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\rho_i\times q_i}{q_{\mathrm{c}}},q\neq 0\cdots(4.2.2.18)$$

(4.2.2.19)が成立するとき(4.2.2.17)は(4.2.2.20)に記述できる.(4.2.2.20)か

ら（4.2.2.21）を得る．

$$\rho_{\mathrm{c}} = \rho_i \cdots (4.2.2.19)$$

$$\rho_{\mathrm{c}} \times q_{\mathrm{c}} = \sum_{i=1}^{n} \rho_{\mathrm{c}} \times q_i \cdots (4.2.2.20)$$

$$q_{\mathrm{c}} = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdots (4.2.2.21)$$

(4.2.2.12) から (4.2.2.22) が記述できる．

（4.2.2.23）の右辺は法線応力とその断面積である．ただし，計算上は接線応力とその断面積にも類似の計算が成立することは明らかである．(4.2.2.22）と（4.2.2.23）から（4.2.2.24）を得る．（4.2.2.24）から質点系のコンプライアンス（4.2.2.25）を得る．

$$\mathrm{m_c}\ddot{x}_c = f_{\mathrm{xc}} \cdots (4.2.2.22)$$

$$f_{\mathrm{xc}} = p_{\mathrm{xc}} \times S_{\mathrm{xc}}(t, x_{\mathrm{c}}) \cdots (4.2.2.23)$$

$$p_{\mathrm{xc}} = \frac{\rho_{\mathrm{c}}\ddot{x}_c}{S_{\mathrm{xc}}(t, x_{\mathrm{c}})} q_{\mathrm{c}} \cdots (4.2.2.24)$$

$$\frac{q_{\mathrm{c}}}{p_{\mathrm{xc}}} = \frac{S_{\mathrm{xc}}(t, x_{\mathrm{c}})}{\rho_{\mathrm{c}}\ddot{x}_c}, \rho_{\mathrm{c}}\ddot{x}_c \neq 0 \cdots (4.2.2.25)$$

### 4.2.3 D'Alembert の原理とコンプライアンス

（4.2.3.1）は Newton の運動方程式を書換えたものである．(4.2.3.1) で D'Alembert の原理と呼ばれる解釈がある．D'Alembert の原理の解釈では，運動は（4.2.3.1）の左辺の第一項の力と第二項の慣性力（4.2.3.2）とでつりあっているように起こる，ことになる．（4.2.3.2）は慣性抵抗とも呼ぶことがある．（4.2.3.1）はつりあいの式と看做すことができる．

$$\mathbf{f} - \mathbf{m}\dot{\mathbf{v}} = 0 \cdots (4.2.3.1)$$

$$-\mathbf{m}\dot{\mathbf{v}} \cdots (4.2.3.2)$$

（4.2.1.13）と（4.2.3.1）から（4.2.3.3）が記述できる．（4.2.3.3）から（4.2.3.4）が導出できる．（4.2.1.14）と（4.2.3.4）から（4.2.3.5）が記述できる．（4.2.3.5）から（4.2.3.6）が記述できる．

$$p(t,x) \cdot S(t,x) - \frac{\rho \times \ddot{x}(t)}{S(t,x)} \cdot q(t) \cdot S(t,x)$$
$$= 0 \cdots (4.2.3.3)$$

$$p(t,x) - \frac{\rho \times \ddot{x}(t)}{S(t,x)} \times q(t) = 0 \cdots (4.2.3.4)$$

$$p(t,x) - \frac{q(t)}{c(t,x)} = 0 \cdots (4.2.3.5)$$

$$p(t,x) = \frac{q(t)}{c(t,x)} \cdots (4.2.3.6)$$

（4.2.1.21）と（4.2.3.1）を使って（4.2.3.7）を記述する．（4.2.3.7）から（4.2.3.8）が導出できる．（4.2.3.8）から（4.2.3.9）が記述できる．

$$p(t,x) \cdot S(t,x) - \frac{q(t)}{c(t,x)} \cdot S(t,x) = 0 \cdots (4.2.3.7)$$

$$p(t,x) \cdot S(t,x) = \frac{q(t)}{c(t,x)} \cdot S(t,x) \cdots (4.2.3.8)$$

$$p(t,x) = \frac{q(t)}{c(t,x)} \cdots . (4.2.3.9)$$

（4.2.3.6）と（4.2.3.9）はつりあいの式から導出したものである．しかし，(4.2.3.6) は加速度をもっている対象から導出したのに対して（4.2.3.9）は加速度をもっていない対象から導出したものである．（4.2.3.6）と（4.2.3.9）のどちらからでも（4.2.3.10）が記述できる．

$$c(t,x) = \frac{q(t)}{p(t,x)} \cdots . (4.2.3.10)$$

## 4.3 血流量とコンプライアンスの関係についての考察

4.3 では特に断らない限り一変数の関数であるものとする．また，4.3 では特に断らない限り $t$ は時間を意味するものとする．血流量とコンプライアンスの関係について考察する．血流量の定義は（2.2.2.2）で与えている．コンプライアンスの関係式では，（2.2.1.1)，(4.2.1.83）および（4.2.1.19）の順序で考察する．

(4.3.1) は (2.2.1.1) から導出できる．(4.3.2)

は（4.2.1.83）から導出できる．

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\times p+c\times\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\cdots(4.3.1)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=c_{\mathrm{d}}(t)\times\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\neq 0\right)\cdots(4.3.2)$$

（4.3.3）は（2.2.1.1）から導出できる．（4.3.3）の第一階の導関数を計算すると（4.3.1）が得られる．(4.3.3）が得られることは図 2.1 のような回路モデルから回路方程式を導出する際に重要である．図 2.1 のような回路モデルの回路方程式の導出は 2.2.4 で論じた．

$$q(t)=c(t)\times p(t)\cdots(4.3.3)$$

心臓あるいは血管の内圧が時間の一変数の関数で記述できる場合には，一般にはその内圧の関数は単調（狭義）ではない．(4.3.4) と（4.3.5）の右辺が互いに逆なる関数である場合には，（4.3.4）は単調（狭義）である．(4.3.2) から容積と内圧の関係を導出するために，(4.3.6) の微分方程式を解く場合には，（4.3.7）の積分をする方法がある．(4.3.7) の右辺のコンプライアンスは $t$ を変数としている．この $t$ が（4.3.4）の左辺の変数 $p$ と互いに逆なる関数である（4.3.5）を得る区間を考えることができる．この区間ごとに積分領域を区別して（4.3.7）を計算できるものと著者は考える．

しかし，（4.3.3）と（4.3.7）が等しい数学的記述になるには特別の条件が必要である．このために，（4.3.2）では（4.3.3）のように電気回路や電子回路の数式処理で図 2.1 のモデルから回路方程式を導出できない．一般的には，時変型コンデンサの場合は（4.3.1）のような数学的記述となり，（4.3.2）のようにはならない．

$$p=\psi(t)\cdots(4.3.4)$$

$$t=\sigma(p)\cdots(4.3.5)$$

$$\mathrm{d}q=c_{\mathrm{d}}(t)\times\mathrm{d}p\cdots(4.3.6)$$

$$\int\mathrm{d}q=\int c_{\mathrm{d}}(t)\,\mathrm{d}p\cdots(4.3.7)$$

（4.3.8）が成立する場合で（4.3.1）と（4.3.2）を考察する．(4.3.8）が成立すると（4.3.1）は（4.3.9）のように記述できる．また，(4.3.9）は（2.2.1.1）からも考察できるものと著者は考える．(2.2.1.1）の右辺の分母が変化しなくてもその右辺の分子が変化するならば，(2.2.1.1）の左辺が変化する．(4.3.2) では (4.3.8) の場合は定義域でない．しかし，（4.3.8）の場合で（4.3.10）が有限値であるものとすると、(4.3.11）を計算できる．一般的には，（4.3.9）と（4.3.11）は等しくない．

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=0\cdots(4.3.8)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\times p\cdots(4.3.9)$$

$$c_{\mathrm{d}}(t)\cdots(4.3.10)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=0\cdots(4.3.11)$$

（4.3.10）を（2.2.1.3）の左辺で定義して（4.3.12）のように導出する場合について考察する．(4.3.12）に（2.2.1.3）の右辺を代入すると（4.3.13）が記述できる．（4.3.8）が成立する場合は（4.3.13）から（4.3.14）が記述できる．(4.3.14）では（4.3.15）が前提となる．

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=c_{\mathrm{d}}(t)\times\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t},\left(\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}t}\neq 0\right)\cdots(4.3.12)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=c_{\mathrm{d}}(t)\times\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(4.3.13)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-c_{\mathrm{d}}(t)\times\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}\cdots(4.3.14)$$

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}\neq 0\cdots(4.3.15)$$

(4.3.9) では (4.3.14) のように圧の時間に対する変化率を記述していない．このことは，(4.3.1) と (4.3.2) の比較の際にも同様である．一般には，(4.3.2) および (4.3.12) で定義域とならない場合でも (4.3.1) は記述ができる．このことは，関数を記述する場合には特徴的となる点である．また，(4.3.2) や (4.3.12) のように圧の時間に対する変化率がなくとも，物理学では (2.2.2.2) を説明することはできる．(4.3.2) や (4.3.12) で事実を説明できていない所を考察する上でこの物理学と異なる点は重要であるものと著者は考える．運動する流体の力学では，粘性のない完全流体の場合も粘性をもった流体の場合も圧の時間に対する変化率を記述していない式から流量を算出している．

ベルヌーイの定理の導出過程で使われている圧力は時間に対する変化をする必要はない．現在では，完全流体ではこのベルヌーイの定理が成書で指導されていることは周知の事実である．一般に完全流体の定常流において，ベルヌーイの定理は一本の流線上で (4.3.16) のように記述できる．(4.3.16) では，(4.3.17) は体積密度，(4.3.18) は流体の速さ，(4.3.19) は重力加速度および (4.3.20) は基準面からの高さとしている．

$$p+\frac{1}{2}\rho\times v^2+\rho\times g\times h=\text{一定}\cdots(4.3.16)$$

$\rho\cdots(4.3.17)$

$v\cdots(4.3.18)$

$g\cdots(4.3.19)$

$h\cdots(4.3.20)$

ハーゲン・ポアズイユの法則 (4.3.21) が成立する前提に圧力が時間に対して変化する必要はない．粘性をもった流体の運動では，(4.3.21) が成書で指導されていることは周知の事実である．(4.3.21) では，(4.3.22) は粘性率，(4.3.23) は管の長さ，(4.3.24) は管の半径，および (4.3.25) と (4.3.26) は両端の圧力である．(4.3.21) の右辺では管の両端の圧差は記述されている．

$$Q=\frac{\pi\times(p_1-p_2)}{8\times\eta\times l}\times a^4\cdots(4.3.21)$$

$\eta\cdots(4.3.22)$

$l\cdots(4.3.23)$

$a\cdots(4.3.24)$

$p_1\cdots(4.3.25)$

$p_2\cdots(4.3.26)$

圧力が時間に対して変化しない場合に，流量が存在することは (4.316) や (4.3.21) でも流体力学で計算できる．(4.3.2) や (4.3.12) のように圧の時間に対する変化率で流量を記述することは，完全流体の定常流および粘性をもつ流体でも，上述の (4.316) と (4.3.21) ように否定できる．圧縮力の場合には，粘性の影響による圧力は含まれていないものと，一般には説明されることがある．(4.3.21) の場合は粘性をもつ流体を前提とした計算である．4.2.1 で粘性を考慮できるコンプライアンスを運動方程式から導出している．ここから，この粘性を考慮できる (4.2.1.19) についての (2.2.2.2) について考察する．

(4.3.27) は運動方程式である．(4.3.27) の質量は定数である．(4.3.28) は質量，体積密度および体積の関係を記述している．(4.3.28) を (4.3.27) に代入すると (4.3.29) が記述できる．

$\mathrm{m}\times a=f\cdots(4.3.27)$

$\mathrm{m}=\rho\times q\cdots(4.3.28)$

$\rho\times q\times a=f\cdots(4.3.29)$

(4.3.29) の両辺を時間で微分すると (4.3.30) が記述できるものとする．(4.3.31) は断面積，応力および力の関係を記述している．(4.3.31) を時間で微分すると (4.3.32) を記述できるものとする．

$\dot{\rho}\times q\times a+\rho\times\dot{q}\times a+\rho\times q\times\dot{a}=\dot{f}\cdots(4.3.30)$

$f=p\times S\cdots(4.3.31)$

$\dot{f}=\dot{p}\times S+p\times\dot{S}\cdots(4.3.32)$

（4.3.30）に（4.3.32）を代入すると（4.3.33）を記述できる．（4.3.33）の左辺の第二項以外は（4.3.33）の右辺に記述すると（4.3.34）のようになる．（4.3.35）と（4.3.36）を前提として（4.3.37）が導出できる．

$\dot{\rho}\times q\times a+\rho\times\dot{q}\times a+\rho\times q\times\dot{a}$
$=\dot{p}\times S+p\times\dot{S}\cdots(4.3.33)$

$\rho\times\dot{q}\times a$
$=\dot{p}\times S+p\times\dot{S}-\dot{\rho}\times q\times a-\rho\times q\times\dot{a}\cdots(4.3.34)$

$\rho\neq 0\cdots(4.3.35)$

$a\neq 0\cdots(4.3.36)$

$\dot{q}$
$=\dfrac{\dot{p}\times S+p\times\dot{S}-\dot{\rho}\times q\times a-\rho\times q\times\dot{a}}{\rho\times a}\cdots(4.3.37)$

（4.3.37）を（4.3.38）のように書き換える．（4.3.39）と（4.3.40）を使って（4.3.39）の両辺の時間に対する微分をすると（4.3.41）が算出できる．（4.3.39），(4.3.40)および（4.3.41）から（4.3.42）が導出できる．

$\dot{q}=\dot{p}\times\dfrac{S}{\rho\times a}$
$+p\times\left(\dfrac{\dot{S}}{\rho\times a}-\dfrac{\dot{\rho}}{\rho}\times\dfrac{q}{p}-\dfrac{q}{p}\times\dfrac{\dot{a}}{a}\right)\cdots(4.3.38)$

$c=\dfrac{S}{\rho\times a}\cdots(4.3.39)$

$c=\dfrac{q}{p}\cdots(4.3.40)$

$\dot{c}=\dfrac{\dot{S}}{\rho\times a}-\dfrac{\dot{\rho}}{\rho}\times\dfrac{q}{p}-\dfrac{q}{p}\times\dfrac{\dot{a}}{a}\cdots(4.3.41)$

$\dot{c}=\dfrac{\dot{S}}{S}\times c-\dfrac{\dot{\rho}}{\rho}\times c-\dfrac{\dot{a}}{a}\times c\cdots(4.3.42)$

（4.3.41）を使って，（4.3.38）を（4.3.43）のように書き換えることができる．（4.3.39）を使って（4.3.43）を（4.3.44）のように書き換えることができる．

$\dot{q}=\dot{p}\times\dfrac{S}{\rho\times a}+p\times\dot{c}\cdots(4.3.43)$

$\dot{q}=\dot{p}\times c+p\times\dot{c}\cdots(4.3.44)$

（4.3.44）は（4.3.1）と数学的記述は同様のものとみなすことができる．しかし，（4.3.1）は内圧を記述して導出したのに対して（4.3.44）は粘性も考慮できる応力を使って運動方程式から導出したものである．（4.3.45）の関係から以下のように２つに大別して（4.3.44）を考察する．

$\dot{\mathrm{m}}=\dot{\rho}\times q+\rho\times\dot{q}\cdots(4.3.45)$

１つは，（4.3.46）～（4.3.51）を前提として，(4.3.44)を考察する．(4.3.47)を(4.3.44)に代入すると(43.52)を記述できる．(4.3.52)を満足するために（4.3.53）および（4.3.54）を前提にする．（4.3.46）および（4.3.53）を（4.3.42）に代入して（4.3.55）を記述できる．（4.3.55）から（4.3.56）を記述できる．（4.3.54）を（4.3.32）に代入すると（4.3.57）を記述できる．（4.3.57）を満足するためには（4.3.51）が前提になる．（4.3.56）あるいは（4.3.57）から（4.3.58）となる．ただし，（4.3.59）となる．

$\dot{\rho}=0\cdots(4.3.46)$

$\dot{q}=0\cdots(4.3.47)$

$p\neq 0\cdots(4.3.48)$

$q\neq 0\cdots(4.3.49)$

$\dot{\mathrm{m}}=0\cdots(4.3.50)$

$\dot{a}\neq 0\cdots(4.3.51)$

$\dot{p}\times c+p\times\dot{c}=0\cdots(4.3.52)$

$\dot{c}=0\cdots(4.3.53)$

$\dot{p}=0\cdots(4.3.54)$

$\dfrac{\dot{S}}{S}-\dfrac{\dot{a}}{a}=0\cdots(4.3.55)$

$\dot{S}=\dfrac{S}{a}\times\dot{a}\cdots(4.3.56)$

$\dot{f}=p\times\dot{S}\neq 0\cdots(4.3.57)$

$\dot{S} \neq 0 \cdots (4.3.58)$

$S \neq 0 \cdots (4.3.59)$

他方は，（4.3.60）～（4.3.64）を前提として（4.3.44）を考察する．(4.3.62）では（4.3.65）と（4.3.66）が前提となる．

$\dot{\rho} \neq 0 \cdots (4.3.60)$

$\dot{q} \neq 0 \cdots (4.3.61)$

$p \neq 0 \cdots (4.3.62)$

$q \neq 0 \cdots (4.3.63)$

$\dot{\mathrm{m}} = 0 \cdots (4.3.64)$

$S \neq 0 \cdots (4.3.65)$

$a \neq 0 \cdots (4.3.66)$

（4.3.60）～（4.3.64）の前提で，（4.3.67）あるいは（4.3.68）の一方のみが成立する．（4.3.67）と（4.3.68）の両方が同時に成立することはない．

$\dot{c} = 0 \cdots (4.3.67)$

$\dot{p} = 0 \cdots (4.3.68)$

（4.3.67）が成立する場合には，（4.3.67）を（4.3.42）に代入すると（4.3.69）が導出される．（4.3.69）では（4.3.70）が成立する場合も可能である．

$$\frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{a}}{a} = 0 \cdots (4.3.69)$$

$\dot{a} = 0 \cdots (4.3.70)$

（4.3.68）が成立する場合には（4.3.42）は（4.3.71）のように記述できる．（4.3.71）では（4.3.72）が成立するときは（4.3.70）も成立する．(4.3.71）に（4.3.70）および（4.3.72）を代入すると（4.3.73）が記述できる．

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{S}}{S} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{a}}{a} \cdots (4.3.71)$$

$\dot{S} = 0 \cdots (4.3.72)$

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \cdots (4.3.73)$$

圧縮力の場合と粘性を考慮できる運動方程式から導出した場合についてコンプライアンスと流量の関係を考察してきた．（4.3.74）が成立する場合でも粘性を考慮した応力でコンプライアンスを計算することができる．この考察は（4.2.1.21）あるいは（4.2.3.10）で行った．（4.2.1.21）あるいは（4.2.3.10）では，（4.2.1.16）が成立する場合は（4.3.75）が記述できる．（4.3.75）から（4.3.76）が計算できる．

$a = 0 \cdots (4.3.74)$

$q(t) = c(t) \times p(t) \cdots (4.3.75)$

$\dot{q} = \dot{p} \times c + p \times \dot{c} \cdots (4.3.76)$

4.3 で考察してきて，血圧，内圧および粘性を考慮できる応力での計算をしてきた．これらは，作用する向きや値の大きさが同じでない場合を次のように考えることができる．地球上での，ヒトの一般的な 0[mmHg]に対する内圧値の大きさは血圧値の約 6 倍以上である．血圧よりも大きいこの内圧が臓器に作用しており，その作用のために臓器に大きな影響が生じる可能性がある．また，血液や臓器に対しては，この圧縮力の影響のみでなく，粘性の影響もある．このため，心臓−血管系での情報処理で物体の移動を応力で説明する方が，圧力での説明よりも，その物体の運動を解析し易い．臓器内に生じる力で，その臓器内の物体の運動を考えることができる．心臓あるいは血管内では，血液とその構成成分の移動が 2006 年現在の著者の主な考察対象となる．これらの考察対象を（4.3.77）で考えることができる．（4.3.77）の右辺は心臓あるいは血管内に作用している力を分子として，左辺の応力を定義するための断面積を分母に与えたものである．この断面積は血液の進行方向に対して直角に与える．このとき，左辺の応力は，法線応力と接線応力の計算ができる．

$$p(t,x) = \frac{f(t)}{S(t,x)}, (S(t,x) \neq 0) \cdots (4.3.77)$$

粘性を考慮した応力の方がこの内圧よりも，

臓器内の物体の運動を追跡する上では多くの力学上の計算が可能である．また，(4.3.77) を使用して導出したコンプライアンス（4.2.1.19）および（4.2.1.21）は，運動方程式（4.2.1.4）に記述できる．運動方程式で血液を記述する際には，質点系の力学の 4.2.2 で論じた熱力学的変化の影響を，2006 年現在著者は解明していない．この熱力学的変化を解明することは，現在の著者の課題である．ただし，(4.2.2.24) を使用する際には，臓器内の特定の領域内での血液の質量中心の各変数値を与えることを著者は考えている．このために，この質点系の各質点の移動速度の速い方が熱力学的変化の影響は小さいものと著者は考察している．ただし，質量中心の位置について次のような注意を著者は考えている．その特定の領域内の固定した一点あるいは，その領域内の特定の一点に十分近い近傍内に質量中心の位置を決定するものとする．この質量中心の決定は測定中に生じる誤差を小さくするために，物理理論上での強力な技術となるものと 2006 年現在著者は考えている．

血液の各構成物質を質点として，それらの各質点について考察すると次のようになる．慣性の法則では物体は，力が作用していない場合でも一直線上を等速で進むことがある．血流が生じている場合には血液を構成している物体が移動しているものと考える．そして，それらの物体が一直線上を等速で進むならば，血流は存続できるものと著者は考える．しかし，血流が生じる路は直線上に存在するだけでない．このため，血流が直線上を等速で進み続けることは一般的には不可能であるものと著者は考える．この場合に，運動の第二法則からは各物体に力が働くときに，その力の方向にその物体は加速度をもち，その物体は直線上でない軌道を取ることが可能となるものと著者は考える．

### 4.4 コンプライアンスと接線の傾きの関係

（4.4.1）は有界閉区間[0，2π]上の連続関数のつくるバナッハ空間 $C_p[0,\ 2\pi]$の要素であることを表している．（4.4.2）の三角多項式は，有理数を係数とし，任意に与えられた正数 $\varepsilon$ に対して (4.4.3) を満足する．(4.4.3) の不等式の左辺は最大値ノルムである．ただし，$m$ は任意の整数である．

$$x \in C_P[0, 2\pi] \cdots (4.4.1)$$

$$T(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} (c_m \cos mt + d_m \sin mt) \cdots (4.4.2)$$

$$\|x - T\|_\infty < \varepsilon \cdots (4.4.3)$$

３章の有限フーリエ解析では，（4.4.2）の有理数の係数をフーリエ係数で計算したもので容積と内圧の近似式を記述した．フーリエ係数は (4.4.4) および (4.4.5) で記述できる．ここで，（4.4.6）を計算すると（4.4.7）と（4.4.8）の関係が導出できる．（4.4.8）は（4.4.7）の複素共役である．ただし，(4.4.9) は虚数単位である．

$$c_m = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos mt\mathrm{d}t \cdots (4.4.4)$$

$$d_m = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin mt\mathrm{d}t \cdots (4.4.5)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi\times m}{T}t}\mathrm{d}t \cdots (4.4.6)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2}(c_m - \mathrm{i}d_m) \cdots (4.4.7)$$

$$\alpha_{-m} = \frac{1}{2}(c_{-m} + \mathrm{i}d_{-m}) \cdots (4.4.8)$$

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1} \cdots (4.4.9)$$

フーリエ係数は（4.4.7）と（4.4.8）を使った関数近似の最適性として（4.4.10）のような関係がある．(4.4.10) の不等式の右辺に記述してある（4.4.11）は複素数である．(4.4.10) は（4.4.12）を周期 $T$の周期関数とする．任意の整数$N$と複素数（4.4.11）に対してフー

リエ係数は（4.4.10）を満足する．

$$\int_0^T \left| x(t) - \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t} \right|^2 dt \le \int_0^T \left| x(t) - \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t} \right|^2 dt$$
$$\cdots(4.4.10)$$

$$\gamma_m (m = 0, \pm 1, \cdots) \cdots (4.4.11)$$
$$x(t) \cdots (4.4.12)$$

血液の体積の近似式を（4.4.13）とする．応力の近似式を（4.4.14）とする．（4.4.13）と（4.4.14）を使って（4.2.1.49）を計算したものが（4.4.15）である．ただし，（4.4.15）が定数Aになると仮定する．

$$T_q(t) = \frac{c_{q0}}{2} + \sum_{m=1}^{n} \left( c_{qm} \cos mt + d_{qm} \sin mt \right) \cdots (4.4.13)$$

$$T_p(t) = \frac{c_{p0}}{2} + \sum_{m=1}^{n} \left( c_{pm} \cos mt + d_{pm} \sin mt \right) \cdots (4.4.14)$$

$$\frac{\sum_{m=1}^{n} \left( c_{qm} (\cos mt_1 - \cos mt_2) + d_{qm} (\sin mt_1 - \sin mt_2) \right)}{\sum_{m=1}^{n} \left( c_{pm} (\cos mt_1 - \cos mt_2) + d_{pm} (\sin mt_1 - \sin mt_2) \right)}$$
$$= \mathrm{A} \cdots (4.4.15)$$

（4.4.15）の仮定から（4.4.16）が成立する．（4.4.16）から（4.4.17）および（4.4.18）の関係を得ることができる．

$$\sum_{m=1}^{n} \{ (c_{qm} - \mathrm{A} \times c_{pm})(\cos mt_1 - \cos mt_2)$$
$$+ (d_{qm} - \mathrm{A} \times d_{pm})(\sin mt_1 - \sin mt_2) \} = 0 \cdots (4.4.16)$$
$$c_{qm} - \mathrm{A} \times c_{pm} = \mathrm{B}_{cm}, (\mathrm{B}_{cm} : \mathrm{const.}) \cdots (4.4.17)$$
$$d_{qm} - \mathrm{A} \times d_{pm} = \mathrm{B}_{dm}, (\mathrm{B}_{dm} : \mathrm{const.}) \cdots (4.4.18)$$

（4.4.17）と（4.4.18）に（4.4.4）と（4.4.5）から計算したフーリエ係数を代入し，（4.4.19）と（4.4.20）を導出する．（4.4.19）と（4.4.20）から（4.4.21）と（4.4.22）に纏める．（4.4.21）および（4.4.22）から（4.4.23）の関係を得る．（4.4.23）から（4.4.24）のように書き換える．（4.4.24）の左辺では，（4.2.1.19）の右辺が記述されている．

$$\frac{2}{T} \int_0^T q(t) \cos mt \mathrm{d}t - \mathrm{A} \times \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos mt \mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{B}_{cm} \cdots (4.4.19)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T q(t) \sin mt \mathrm{d}t - \mathrm{A} \times \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \sin mt \mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{B}_{dm} \cdots (4.4.20)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T (q(t) - \mathrm{A} \times p(t)) \cos mt \mathrm{d}t = \mathrm{B}_{cm} \cdots (4.4.21)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T (q(t) - \mathrm{A} \times p(t)) \sin mt \mathrm{d}t = \mathrm{B}_{dm} \cdots (4.4.22)$$

$$q(t) - \mathrm{A} \times p(t) = B_3(t) \cdots (4.4.23)$$
$$\frac{q(t)}{p(t)} = \mathrm{A} + \frac{B_3(t)}{p(t)}, (p(t) \ne 0) \cdots (4.4.24)$$

（4.4.25）と（4.4.26）が成立する場合は，（4.4.4）と（4.4.5）のフーリエ係数の正規直交系の関数と（4.4.23）の右辺が互に直交である．（4.4.17）および（4.4.18）で（4.4.25）と (4.4.26) が成立すると (4.4.27) と (4.4.28) が成立する．（4.4.29）の場合は，（4.4.27）と（4.4.28）が成立する．

$$\mathrm{B}_{cm} = 0 \cdots (4.4.25)$$
$$\mathrm{B}_{dm} = 0 \cdots (4.4.26)$$

$$\frac{c_{qm}}{c_{pm}} = \mathrm{A}, c_{pm} \ne 0 \cdots (4.4.27)$$

$$\frac{d_{qm}}{d_{pm}} = \mathrm{A}, d_{pm} \ne 0 \cdots (4.4.28)$$

$$B_3(t) = \mathrm{B}_3, (\mathrm{B}_3 : \mathrm{const.}) \cdots (4.4.29)$$

（4.4.29）が成立する場合には（4.4.23）から（4.4.30）が記述できる．（4.4.30）の右辺の第一項の係数である（4.4.15）の右辺――（4.2.1.49）を参照――は（4.4.31）が成立する場合に定義できる．（4.4.30）の両辺を時間の変数で微分すると (4.4.32) が記述できる．（4.4.33）を前提として，合成関数の微分法を使うと（4.4.32）から（4.4.34）を得る．

$$q(t) = \mathrm{A} \times p(t) + \mathrm{B}_3 \cdots (4.4.30)$$
$$p'(\tau) \ne 0 \cdots (4.4.31)$$
$$q'(t) = \mathrm{A} \times p'(t) \cdots (4.4.32)$$
$$p'(t) \ne 0 \cdots (4.4.33)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} = \mathrm{A}, t = \tau \cdots (4.4.34)$$

（4.4.35）が成立する場合には（4.4.24）から（4.4.36）が記述できる．（4.4.36）の左辺が極限値をとる場合を 4.6 で論じる．

$$B_3(t) = 0 \cdots (4.4.35)$$

$$\frac{q(t)}{p(t)} = \mathrm{A} \cdots (4.4.36)$$

（4.4.37）は内積の計算である．（4.4.37）で（4.4.38）が成立すると（4.4.39）が算出できる．(4.4.38) は直交関係を示す．(4.4.38) から（4.4.23）の左辺の第二項は，その左辺の第一項の射影であることがわかる．ただし，内積は区間［a,b］では（4.4.40）の計算とする．

$$(q - \mathrm{A} \times p, p) = (q, p) - \mathrm{A}(p, p) \cdots (4.4.37)$$

$$(q - \mathrm{A} \times p, p) = 0 \cdots (4.4.38)$$

$$(q, p) = \mathrm{A}(p, p) \cdots (4.4.39)$$

$$(q, p) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} q(t)p(t)\mathrm{d}t \cdots (4.4.40)$$

次のように，(4.4.38) の直交関係は完全正規直交系を使って計算できる．(4.4.41) を完全正規直交系とする．（4.4.42）は（4.4.43）での容積 $q$ の（4.4.41）のフーリエ型展開係数である．(4.4.44) は (4.4.45) の係数である．（4.4.41）の正規直交系で応力 $p$ の関数を記述できるものと仮定する．（4.4.43）を（4.4.46）に書き直す．(4.4.46) の第一項の直交系は（4.4.45）で使った直交系である．（4.4.23）を（4.4.47）に記述する．(4.4.47) に (4.4.43) と (4.4.45) を代入する．(4.4.46) と（4.4.48）から（4.4.49）を導出できる．（4.4.38）に（4.4.45）と（4.4.49）を代入すると（4.4.50）が計算できる．

ただし，真値を得る関数を（4.4.45）で記述することは難しいものと著者は考える．著者の意見では次のようになる．実際は，応力の近似式を（4.4.45）で記述することになるものと考える．（4.4.41）の完全正規直交系が（4.4.4）と（4.4.5）のフーリエ級数の完全正規直交系であるならば，(4.4.10) が成立する．このために，(4.4.45) で関数近似の最適性を考えることができる．

$$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \cdots (4.4.41)$$

$$\alpha_{\mathrm{q}j} = (q, \varphi_j) \cdots (4.4.42)$$

$$q = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{\mathrm{q}j} \varphi_j \cdots (4.4.43)$$

$$\alpha_{\mathrm{p}j} = (p, \varphi_j) \cdots (4.4.44)$$

$$p = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{\mathrm{p}j} \varphi_j \cdots (4.4.45)$$

$$q = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{\mathrm{q}j} \varphi_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} \alpha_{\mathrm{q}j} \varphi_j \cdots (4.4.46)$$

$$q(t) = \mathrm{A} \times p(t) + B_3(t) \cdots (4.4.47)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{\mathrm{q}j} \varphi_j = \mathrm{A} \times \sum_{j=1}^{N} \alpha_{\mathrm{p}j} \varphi_j + B_3(t) \cdots (4.4.48)$$

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \alpha_{\mathrm{q}j} \varphi_j = B_3(t) \cdots (4.4.49)$$

$$\left( \sum_{j=N+1}^{\infty} \alpha_{\mathrm{q}j} \varphi_j , \sum_{j=1}^{N} \alpha_{\mathrm{p}j} \varphi_j \right) = 0 \cdots (4.4.50)$$

（4.4.23）では（4.4.15）の右辺の定数で導関数の値を使った．(4.4.51) では容積の第一階の導関数を使って（4.2.1.19）との関係を考察する．流通座標（4.4.52）を使って（4.4.51）の接線の方程式を導出する．（4.4.51）と（4.4.52）から（4.4.53）のように記述できることは，流通座標での接線の方程式の導出では周知である．（4.4.53）から（4.4.54）のように書き直せる．（4.4.54）から（4.4.55）のように纏める．（4.4.55）の右辺を使って（4.4.56）を記述できる．(4.4.56) から（4.4.57）が導出できると，(4.4.57）で（4.2.1.19）と容積の第一階の導関数の関係を得ることができた．

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} = \frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}} = A(t), \left( \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \neq 0 \right) \cdots (4.4.51)$$

$(X,Y)\cdots(4.4.52)$

$\dfrac{Y-q}{X-p}=A(t),(X\neq p)\cdots(4.4.53)$

$Y-q=A(t)\times(X-p)\cdots(4.4.54)$

$Y-A(t)\times X=q-A(t)\times p=B(t)\cdots(4.4.55)$

$q(t)=A(t)\times p(t)+B(t)\cdots(4.4.56)$

$\dfrac{q(t)}{p(t)}=A(t)+\dfrac{B(t)}{p(t)},(p(t)\neq 0)\cdots(4.4.57)$

(4.4.58) が成立するときには (4.4.56) は (4.4.59) に記述できる. (4.4.59) から (4.4.60) を導出できる. (4.4.60) は (4.4.36) の場合と類似であり, 4.6 で (4.4.60) の右辺が (4.4.60) の左辺の極限値である場合を考察する.

$B(t)=0\cdots(4.4.58)$

$q(t)=A(t)\times p(t)\cdots(4.4.59)$

$\dfrac{q(t)}{p(t)}=A(t),(p(t)\neq 0)\cdots(4.4.60)$

(4.4.61) が記述できるときは (4.4.56) は (4.4.62) に記述できる. (4.4.62) から (4.4.63) を記述できる. (4.4.51) と (4.4.61) から (4.4.64) が記述できる. (4.4.64) から (4.4.65) を得る. (4.4.65) から (4.4.66) が計算できる. (4.4.66) から (4.4.67) を導出できる.

$A(t)=0\cdots(4.4.61)$

$q(t)=B(t)\cdots(4.4.62)$

$\dfrac{q(t)}{p(t)}=\dfrac{B(t)}{p(t)},(p(t)\neq 0)\cdots(4.4.63)$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}}=0\cdots(4.4.64)$$

$\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=0\cdots(4.4.65)$

$q(t)=\text{const.}\cdots(4.4.66)$

$\dfrac{q(t)}{p(t)}=\dfrac{\text{const.}}{p(t)},(p(t)\neq 0)\cdots(4.4.67)$

### 4.5 線形写像とコンプライアンスについての考察 [6)]

4.5 では関数解析の線形作用素についてのコンプライアンスを考察する. 4.5 の初めの方で (2.2.1.1) と (4.2.1.19) が線形作用素であるものとして考察する. そして, その線形作用素が有界であり, かつ掛け算作用素となることを論じる.

その後に, (4.2.1.28) と (4.2.1.83) での線形作用素としての考察を行う. (4.2.1.28) と (4.2.1.83) が近似式の場合は線形作用素として論じるが, 近似式でない場合は線形作用素として計算できないことを示す.

(4.5.1) はバナッハ空間であるとする. (4.5.2) は係数体とする. 4.5 での係数はすべて実数であるものとする.

$X\cdots(4.5.1)$

$\boldsymbol{K}\cdots(4.5.2)$

(4.5.3) と (4.5.4) が成立する場合には線形空間で線形の写像が成立している. (4.5.3) と (4.5.4) の作用素を線形作用素と呼ぶ. このとき, この線形作用素の定義域は (4.5.1) の部分空間であるものとする.

$c(t)\times(p_1(t)+p_2(t))=c(t)\times p_1(t)+c(t)\times p_2(t),$
$(\forall p_1,p_2\in X)\cdots(4.5.3)$

$c(t)\times(\alpha\times p(t))=\alpha\times c(t)\times p(t),$
$(\forall\alpha\in\boldsymbol{K},\forall p\in X)\cdots(4.5.4)$

この線形作用素を (4.5.5) で表すことにする. 一般的な心臓あるいは血管などでは, (4.5.6) を満足する定数 $M$ が存在することは明らかである. (4.5.6) が成立する場合には (4.5.5) は有界である. ただし, $\|\ \|$ はノルムである.

$T\cdots(4.5.5)$

$\|Tp\|\leq M\|p\|,(\forall p\in X)\cdots(4.5.6)$

(4.5.7) で掛け算作用素として (4.5.5) を定義する. (4.5.7) では, (4.5.8) は連続関数であるものとする. ただし, (4.5.9) は実数体とする. (4.5.10) のように (4.5.5) の掛け算作用素を記述できる.

$(Tp)(t) \equiv c(t) \times p(t), (t \in \boldsymbol{R}, c \in X) \cdots (4.5.7)$

$c(t), (t \in \boldsymbol{R}, c \in X) \cdots (4.5.8)$

$\boldsymbol{R} \cdots (4.5.9)$

$T = c(t) \times \cdots (4.5.10)$

（4.5.11）は合成関数の微分法である．（4.5.11）から（4.5.12）が導出できる．（4.5.12）の右辺を（4.5.11）の右辺に代入すると（4.5.13）のようになる．(4.5.12）の分母の導関数は（4.5.13）の右辺の記述には残らず，（4.5.12）の右辺の分子のみが（4.5.13）の右辺に記述される．

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} \times \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}, (t \in \boldsymbol{R}, q, p \in \boldsymbol{X}) \cdots (4.5.11)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} = \frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}}, \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \neq 0\right) \cdots (4.5.12)$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}} \times \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \cdots (4.5.13)$$

実際，(4.5.12）を使って（4.5.14）のように計算する．(4.5.14）から（4.5.15）が導出できる．

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}(\alpha \times p)}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}, (\alpha \neq 0, \forall \alpha \in \boldsymbol{K}) \cdots (4.5.14)$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\right) \times \left(\alpha \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \neq 0\right) \cdots (4.5.15)$$

（4.5.11）～（4.5.15）の計算を（4.5.16）の作用素の定義を考察する．(4.5.16）で対応を与えるバナッハ空間の要素は（4.5.17）を満足する微分可能な関数である．(4.5.16）の係数は（4.5.17）の係数と同じものである．（4.5.16）で (4.5.18) の計算をした．また，（4.5.16）で (4.5.19) の計算をした．(4.5.18) の右辺と（4.5.19）の右辺を比較すると（4.5.20）になる．(4.5.20）から（4.5.16）は線形作用素にはならない．

$$T_K = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, (\alpha \neq 0, \alpha \in \boldsymbol{K}) \cdots (4.5.16)$$

$$p_K = \alpha \times p, (p, p_K \in \boldsymbol{X}, \alpha \neq 0, \alpha \in \boldsymbol{K}) \cdots (4.5.17)$$

$$T_K p_K = T_K(\alpha \times p) = \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}(\alpha p)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \cdots (4.5.18)$$

$$\alpha \times \{T_K(1 \times p)\} = \alpha \times \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \cdots (4.5.19)$$

$$T_K(\alpha \times p) \neq \alpha \times (T_K p) \cdots (4.5.20)$$

（4.5.12）を使って（4.5.21）を計算する．（4.5.21）からも（4.5.16）が一般的には有界でないことが分かる．

$$\left|\lim_{t \to t_0} \frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}}\right| = \infty, \left(\lim_{t \to t_0} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0, \lim_{t \to t_0} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \neq 0\right) \cdots (4.5.21)$$

（4.5.12）が定数の場合について考察する．（4.5.22）のように記号を使う．(4.5.23）のように記述できる．（4.5.23）の係数は（4.5.24）で与える．

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p} = \frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}} = \mathrm{c_{dc}} = \mathrm{const.}, \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \neq 0\right) \cdots (4.5.22)$$

$$\mathrm{c_{dc}} \times \frac{\mathrm{d}(\alpha \times p)}{\mathrm{d}t} = \alpha \times \mathrm{c_{dc}} \times \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \alpha \times \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \cdots (4.5.23)$$

$\forall \alpha \in \boldsymbol{K} \cdots (4.5.24)$

（4.5.12）を（4.5.25）のように計算する．（4.5.25）のバナッハ空間の要素は（4.5.26）で与える．(4.5.25）を使い（4.5.27）が計算できる．(4.5.27）の右辺から（4.5.28）の右辺のように記述できる．(4.5.28）の右辺を（4.5.29）のように書き換える．(4.5.27）の左辺と（4.5.29）の右辺から（4.5.30）のように記述できる．(4.5.25）～（4.5.30）までは（4.5.12）が定数であるとは限らない場合で計算している．(4.5.22) の場合は (4.5.31)

のように計算できる．（4.5.22）の場合は（4.5.23）と（4.5.31）から線形作用素となる．

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}},\left(\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}\neq 0\right)\cdots(4.5.25)$$

$$\forall p_1,p_2\in \boldsymbol{X}\cdots(4.5.26)$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}}\times\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}}\times\left(\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(4.5.27)$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}}\times\left(\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}\right)$$
$$=\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}}\times\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}}\times\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}\cdots(4.5.28)$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}}\times\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}}\times\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\times\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\times\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}\cdots(4.5.29)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\times\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\times\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}\times\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}\cdots(4.5.30)$$

$$\mathrm{c}_{\mathrm{dc}}\times\frac{\mathrm{d}(p_1+p_2)}{\mathrm{d}t}$$
$$=\mathrm{c}_{\mathrm{dc}}\times\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}+\mathrm{c}_{\mathrm{dc}}\times\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}\cdots(4.5.31)$$

ヒトの心臓や血管の一般的な場合では（4.5.22）が成立することは難しいものと著者は考える．そのために，実際の心臓や血管で使用する際には近似式で（4.5.22）が成立することを考える方が現実的であるものと著者は考える．

（4.5.22）に類する式では，（4.2.1.28）を既に導出している．（4.2.1.24）と（4.2.1.27）を前提に（4.2.1.28）を算出した．さらに，（4.2.1.28）の左辺に（4.2.1.83）が成立することを前提にすると，(4.5.32) が導出できる．（4.5.32）から（4.5.33）が導出できるものと仮定する．

（4.5.33）では，（4.2.1.27）の近傍では（4.5.32）の右辺を定数とする．このとき，（4.5.32）の左辺を（4.5.22）の右辺として（4.5.34）が成立する場合を（4.2.1.27）の近傍で考えることができる．

$$\frac{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}}\approx\frac{q(p)-q(p_0)}{p-p_0},\left(p\neq p_0\right)\cdots(4.5.32)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\approx\frac{q(p)-q(p_0)}{p-p_0}\times\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\cdots(4.5.33)$$

$$\mathrm{c}_{\mathrm{dc}}\times\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\approx\frac{q(p)-q(p_0)}{p-p_0}\times\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\cdots(4.5.34)$$

### 4.6　心臓と血管の評価についての考察

有理数を係数とする多項式で，（4.4.2）の三角多項式を次のように記述できる．(4.4.1) と同様にバナッハ空間の要素を（4.6.1）で記述する．（4.6.2）の多項式は任意に与えられた正数 $\varepsilon$ に対して有理数を係数として，（4.6.3）を満足する．

$$x\in C[a,\mathrm{b}]\cdots(4.6.1)$$

$$P(t)=p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots+p_nt^n\cdots(4.6.2)$$

$$\|x-P\|_\infty<\varepsilon\cdots(4.6.3)$$

応力を（4.6.4）の多項式で記述できるものとする．容積を（4.6.5）の多項式で記述できるものとする．（4.6.4）と（4.6.5）で記述した（4.6.6）の右辺は（4.6.6）の左辺の極値で

あるものとする．(4.6.7) が成立するならば (4.6.8) と (4.6.9) が成立する．したがって，(4.6.7) は (4.6.10) を重根にもつ．そして，(4.6.11) は (4.6.12) に記述できる．(4.6.12) は $k$ 重根の場合の記述である．(4.6.12) が (4.6.13) を満足することは周知である．

$$p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n \cdots (4.6.4)$$

$$q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_n t^n \cdots (4.6.5)$$

$$\frac{q(t_0)}{p(t_0)} = \lambda, (p(t_0) \neq 0) \cdots (4.6.6)$$

$$q(t) - \lambda \times p(t) = 0 \cdots (4.6.7)$$

$$q(t_0) - \lambda \times p(t_0) = 0 \cdots (4.6.8)$$

$$\dot{q}(t_0) - \lambda \times \dot{p}(t_0) = 0 \cdots (4.6.9)$$

$$t = t_0 \cdots (4.6.10)$$

$$g(t) = q(t) - \lambda \times p(t) \cdots (4.6.11)$$

$$g(t) = (t - t_0)^k \times u(t) \cdots (4.6.12)$$

$$g^{(k)}(t_0) \neq 0 \cdots (4.6.13)$$

(4.6.8) と (4.6.9) から (4.6.14) が成立する．(4.6.14) では (4.6.6) の極限値の場合に応力と容積が極値をとらないことが次のようにわかる．(4.6.15) の第一階の導関数は (4.6.16) である．(4.6.17) のときに (4.6.15) は極限値をとる．(4.6.17) を計算すると (4.6.18) を導出できる．(4.6.19) を前提にすると (4.6.18) から (4.6.20) になる．(4.6.14) と (4.6.20) から (4.6.21) と (4.6.22) が成立することは明らかである．

$$\frac{\dot{q}(t_0)}{\dot{p}(t_0)} = \frac{q(t_0)}{p(t_0)} = \lambda, (\dot{p}(t_0) \neq 0) \cdots (4.6.14)$$

$$c = \frac{q(t)}{p(t)}, (p(t) \neq 0) \cdots (4.6.15)$$

$$\dot{c} = \frac{\dot{q}(t)p(t) - q(t)\dot{p}(t)}{p^2(t)} \cdots (4.6.16)$$

$$\dot{c} = 0 \cdots (4.6.17)$$

$$\dot{q}(t)p(t) = q(t)\dot{p}(t) \cdots (4.6.18)$$

$$q(t) \neq 0 \cdots (4.6.19)$$

$$\dot{q}(t) \neq 0 \cdots (4.6.20)$$

$$\frac{\dot{q}(t_0)}{\dot{p}(t_0)} \neq 0 \cdots (4.6.21)$$

$$\frac{\dot{q}(t_0)}{\dot{p}(t_0)} \neq \infty \cdots (4.6.22)$$

(4.6.11) から (4.6.23) が計算できる．また，(4.6.16) と (4.6.17) から (4.6.24) を導出できる．(4.6.25) の場合は (4.6.24) から (4.6.26) が成立する．(4.6.10) の場合は (4.6.24) から (4.6.27) が記述できる．この (4.6.10) の場合は (4.6.23) と (4.6.27) が等しい．

$$\dot{g}(t_0) = \dot{q}(t_0) - \lambda \times \dot{p}(t_0) = 0 \cdots (4.6.23)$$

$$\dot{q}(t) = \frac{q(t)}{p(t)} \times \dot{p}(t) \cdots (4.6.24)$$

$$\dot{p}(t) = 0 \cdots (4.6.25)$$

$$\dot{q}(t) = 0 \cdots (4.6.26)$$

$$\dot{q}(t_0) - \lambda \times \dot{p}(t_0) = 0 \cdots (4.6.27)$$

(4.6.28) の分母は応力であり，分子は容積である．(4.6.29) の $\alpha$ と (4.6.30) の $\beta$ は実数の係数である．(4.6.31) は (4.6.29) と (4.6.30) を使って計算したコンプライアンスである．(4.6.31) の両辺を微分すると (4.6.32) になる．(4.6.29) および (4.6.30) の両辺をそれぞれ微分すると (4.6.33) および (4.6.34) になる．

(4.6.35) は容積と応力の比の差である．この差，容積および応力から心臓あるいは血管の評価を行うことを著者は考える．この評価方法では，(4.6.28) を選択する必要がある．そして，(4.6.35) は (4.6.28) を基準とする考えで，その基準となる関数の値からの差である．このコンプライアンスおよびその差から内部に生じている容積，応力，力，加速度，断面積および体積密度を推定することを著者は考えている．

$$c_0(t) = \frac{q_0(t)}{p_0(t)}, (p_0(t) \neq 0) \cdots (4.6.28)$$

$q(t)=\alpha\times q_0(t)\cdots(4.6.29)$

$p(t)=\beta\times p_0(t),(\beta\neq 0)\cdots(4.6.30)$

$$c(t)=\frac{q(t)}{p(t)}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{q_0(t)}{p_0(t)}=\frac{\alpha}{\beta}\times c_0(t)\cdots(4.6.31)$$

$$\dot{c}(t)=\frac{\alpha}{\beta}\times\dot{c}_0(t)\cdots(4.6.32)$$

$\dot{q}(t)=\alpha\times\dot{q}_0(t)\cdots(4.6.33)$

$\dot{p}(t)=\beta\times\dot{p}_0(t)\cdots(4.6.34)$

$$\Delta c(t)\equiv\frac{\alpha\times q_0(t)}{\beta\times p_0(t)}-\frac{q_0(t)}{p_0(t)}\cdots(4.6.35)$$

（4.6.35）は（4.6.36）に書き換えることができる．数値での計算では（4.6.35）と（4.6.36）では異なる計算結果となる場合がある．このような数値での計算では（4.6.37）と（4.6.38）でも同様である．（4.6.37）では（4.6.35）を（4.6.28）を使って纏めている．（4.6.28）に係数を掛けることで，（4.6.38）は（4.6.35）の左辺が記述できる．（4.6.39）は（4.6.28）と（4.6.35）の比である．

$$\Delta c(t)=\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)\times\frac{q_0(t)}{p_0(t)}\cdots(4.6.36)$$

$$\Delta c(t)=\frac{\alpha}{\beta}c_0(t)-c_0(t)\cdots(4.6.37)$$

$$\Delta c(t)=\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)\times c_0(t)\cdots(4.6.38)$$

$$\frac{\Delta c(t)}{c_0(t)}=\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)\cdots(4.6.39)$$

（4.6.40）の変数は実数値である．（4.6.41）の両辺の分子は容積の変化量を（4.6.40）の変数で記述している．（4.6.41）での記述は容積と応力で記述をしており，時間を変数とする関数では記述していない．（4.6.41）は平面座標上では容積と応力のグラフとなるものを著者は考えている．（4.6.41）の真ん中のコンプライアンスは平面座標上での基準となる容積と応力の値である．（4.6.41）では分母の応力は同じものである．

（4.6.35）と（4.6.41）での基準となるコンプライアンスの選択方法は今後の研究課題であるものと著者は考えている．

$\varepsilon_0,\varepsilon_1\geq 0\cdots(4.6.40)$

$$\frac{q-\varepsilon_0}{p}\leq\frac{q}{p}\leq\frac{q+\varepsilon_1}{p}\cdots(4.6.41)$$

コンプライアンスと応力から（4.6.42）の右辺のように容積が計算できる．（4.6.43）では体積密度と（4.6.42）で算出した容積を掛けて定数の質量を計算している．（4.6.44）の左辺では加速度と（4.6.43）で計算した質量を掛けて力を計算している．

$c(t)\times p(t)=q(t)\cdots(4.6.42)$

$\rho\times q(t)=\mathrm{m}=\mathrm{const.}\cdots(4.6.43)$

$\mathrm{m}\times a(t)=f(t)\cdots(4.6.44)$

（4.2.2.24）から（4.6.45）が導出できる．運動方程式から導出したコンプライアンスとして（4.2.1.14）あるいは（4.6.45）を使って断面積，体積密度あるいは加速度を算出できる．（4.6.45）からは左辺の値と右辺の２つの変数が分かれば残りの１つを得ることは明らかである．ただし，（4.2.1.14）の代わりに（4.2.1.20）を使う場合も考えられる．

体積密度や加速度は，（4.6.43）や（4.6.45）などで算出できる．断面積は（4.2.1.2）や（4.6.45）などで算出できる．

$$\frac{q_{\mathrm{c}}}{p_{\mathrm{xc}}}=\frac{S_{\mathrm{xc}}(t,x_{\mathrm{c}})}{\rho_{\mathrm{c}}\ddot{x}_c}\cdots(4.6.45)$$

（4.4.57）から（4.6.46）を記述できる．（4.6.46）の左辺の第一項は（4.6.47）のように記述できる．（4.6.46）の左辺の第一項は平均変化率として解釈できる．（4.6.47）の左辺は時間の変数 $t$ を独立変数として考えることができる．また，容積と応力の媒介変数として $t$ を看做すこともできる．（4.6.47）の前提として（4.6.48）を定める．（4.6.47）の左辺では，t-q 平面座標上の平均変化率と t-p 平面座標上の平均変化率から p-q 平面座標上の平均変化率を記述している．この場合は（4.6.46）の左辺の第一項は p-q の平面座標上の曲線上の弦の勾配となる．（4.6.49）の場

合は（4.6.46）から（4.6.50）が導出できる．（4.6.50）は（4.6.51）と同様の数学的記述である．（4.6.51）は（4.6.24）から計算できる．（4.6.24）が成立する場合は，（4.6.17）が成立することが前提である．（4.6.17）ではコンプライアンス（4.6.15）が極値をとることは明らかである．

2006 年現在の著者の未解決の課題の１つとして（4.6.48）の容積と応力がゼロの場合の与え方である．発生の過程での心臓と血管が完成する或る時点までに容積が零となる時期があることを著者は考えている．この容積が零になる時を応力が零になる時であると定義して，（2.2.1.1）や（4.2.1.14）などのコンプライアンスを平均変化率として扱うことを著者は考えている．(2.2.1.1)，(4.2.1.14) あるいは（4.6.45）では応力はゼロにならないことを前提にしている．このために，応力が零になる時期を気にする必要はない．しかし，平均変化率として考える場合はこの応力が零になる時期が数学的に問題となることは明らかである．

$$\frac{q(t)-0}{p(t)-0}-A(t)=\frac{B(t)}{p(t)},\left(p(t)\neq 0\right)\cdots(4.6.46)$$

$$\frac{q(t)-q(t_0)}{t-t_0}\frac{t-t_0}{p(t)-p(t_0)}=\frac{q(t)-0}{t-t_0}\frac{t-t_0}{p(t)-0}\cdots(4.6.47)$$

$$\begin{cases} q(t_0)=0 \\ p(t_0)=0\cdots(4.6.48) \\ p(t)\neq 0 \end{cases}$$

$$B(t)=0\cdots(4.6.49)$$

$$\frac{q(t)-0}{p(t)-0}=A(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}p(t)}\cdots(4.6.50)$$

$$\frac{q(t)}{p(t)}=\frac{\dot{q}(t)}{\dot{p}(t)}\cdots(4.6.51)$$

## 4.7　電気回路要素との対応関係についての考察

図 2.4 で電気回路要素と本論文の循環系の回路要素との対応関係を与えた．この対応関係を使って，電気回路から回路方程式を導出できる数学的処理で循環系の回路モデルの回路方程式を導出できる．この回路方程式を導出する際にキルヒホッフの法則を使えることになる．

電気量に対して血液量を対応させている．一般に，電荷は電場を作るが，血液量あるいは血液は特に電場に対応するような場を作ることはないものと考えることができる．

電荷が電場で力を受けるのに対して，血液は心臓あるいは血管内で循環のために作用する力や重力を受ける．しかし，一般には心臓や血管内では血液に生じる力は応力にして考える．そして，この応力は内圧と呼ばれる圧縮力を対象としていることがしばしばある．図 2.4 の内圧は 0 mmHg に対する圧であり，式は（2.2.1.2）で与えた．図 2.4 では，この内圧に対して電位を対応させている．

電気量と電位に対応する血液量と内圧を与えることで，コンデンサに対してコンプライアンスを対応させることができる．この対応で使われているコンデンサは，孤立導体球の無限遠に対しての静電容量として考えることで電位と電気量で与えることができる．

心臓あるいは血管内の血液量は，一般には定数ではないものと考えることができる．このことから，心臓あるいは血管内の血液量は時間的に変化する．この変化量を血流量として（2.2.2.2）で定義した．電気量を使った定常流[7]でない電流の定義と同様の数学的記述となっている．微分の記号として，時間（4.7.1）の間に移動する電荷量が（4.7.2）の場合は，電流の強さは (4.7.3) で定義できる．

$$\mathrm{d}t\cdots(4.7.1)$$

$$\mathrm{d}q\cdots(4.7.2)$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\cdots(4.7.3)$$

この電流と電位差で定義したオームの法則の電気抵抗に対して血流量（2.2.2.2）と内圧（2.2.1.2）で定義した流れの抵抗（2.2.2.1）

を対応させている．

### 4.8　キルヒホッフの法則についての考察

(2.2.1.1) は以下のように線形素子[8] であることが計算できる．(4.3.1) を (4.8.1) のように定める．(4.8.1) の右辺に $A$ および $B$ を定数とする $A\times p_1+B\times p_2$ を代入する．代入した式の右辺は (4.8.2) である．(4.8.2) は (4.8.3) に記述できる．(4.8.3) は (4.8.4) に記述できる．(4.8.4) は (4.8.5) に記述できる．(4.8.2) と (4.8.5) が等しいことから (4.8.6) を記述できる．(4.8.6) から (2.2.1.1) が線形素子であることがいえる．ただし，図 2.4 の対応関係を前提とした電気回路論での議論である．

$$f(p)=\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\times p+c\times\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(4.8.1)$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\times\left(A\times p_1+B\times p_2\right)+ c\times\frac{\mathrm{d}\left(A\times p_1+B\times p_2\right)}{\mathrm{d}t}\cdots(4.8.2)$$

$$A\times\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\times p_1+c\times\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}\right)+ B\times\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\times p_2+c\times\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(4.8.3)$$

$$A\times f(p_1)+\mathrm{B}\times f(p_2)\cdots(4.8.4)$$

$$A\times\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\times p_1+c\times\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t}\right)+ B\times\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\times p_2+c\times\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t}\right)\cdots(4.8.5)$$

$$f(A\times p_1+B\times p_2)= A\times f(p_1)+\mathrm{B}\times f(p_2)\cdots(4.8.6)$$

電気回路では次のような回路を線形回路と呼ぶ．回路を構成しているすべての回路素子の電圧と電流の関係が一次式である回路が線形回路である．一般に線形回路網は，上述のような線形回路を任意に結合した回路網のことである．本論文の循環系の回路要素と電気回路要素との対応関係を図 2.4 のようにとってみると図 2.1 を電気――あるいは電子――回路での線形回路網とみなすことができる．このことは (2.2.1.1) が (4.8.6) を満足して，かつ BC 1 が線形性を示す場合である．本論文では (2.2.4.28) ～ (2.2.4.45) を導出する際には，BC 1 が血液の左心室へ向かう逆方向への流れを防ぐものとしている．この逆方向への流れを防ぐ計算は，電流が電圧の高い方から低い方へ生じることとして，線形の電気回路としてみなして計算した．このために，BC1 の特別な数学的な処理はなく，回路方程式を導出する際の仮定に含めている．このために，BC1 が非線形性でも左心室へ向かう逆方向への流れが生じない場合には線形回路網として計算できる．

電気回路の線形回路網として図 2.1 を見た場合，重ねの理が保証される．この場合は，電流分布は血流量の分布に対応することは図 2.4 からも明らかである．電気回路や電子回路で電源の記号として使われているものは，図 2.1 では表示していない．図 2.1 ではコンプライアンスがコンデンサに対応しており，コンデンサが放電する場合は心臓や血管内の血液が流出する場合に対応する．図 2.1 で血液の分布を決定するには各コンプライアンスの血液量の分布を決定することになる．各コンプライアンスの値と内圧によって各コンプライアンスの血液量は決定する．図 2.1 ではコンプライアンスの内圧が電源の電圧――あるいは電位差――に対応する．ただし，この電圧は 0[V]に対するもので電位と等しい．図 2.1 のすべての隣り合うコンデンサ間の電位差が零にならないようにすることで回路網に電流を生じさせ続けることができる．図 2.4 では図 2.1 のすべての隣り合うコンプライアンス間の内圧の差が零にな

らないようにすることに対応する．このために，図 2.1 の血液量はすべての隣り合うコンプライアンスの内圧の差が零にならないように血液量が分布し，かつ血液循環を維持し続ける．

4.10 で提案する線形回路で，各コンプライアンスとその線形回路を一纏めとして電圧制御電圧源と見做すことができる．この電圧制御電圧源――あるいは 4.10 で提案する線形回路――を導入することで（2.2.4.28）～（2.2.4.45）を説明できるようになる．さらに，（2.2.4.28）～（2.2.4.45）よりもヒトのシステムに似た特性の連立微分方程式群を導出できるものと 2006 年現在著者は考える．

図 2.1 を線形の電気回路網としてキルヒホッフの法則を使うことで，（2.2.4.20）は導出できる．（2.2.4.20）は（4.8.7）に付随する斉次方程式――あるいは同次方程式――である．（4.8.8）が恒等的に零である場合（2.2.4.20）は成立する．（2.2.4.20）および（4.8.7）は線形常微分方程式である．（4.8.7）は非斉次方程式――あるいは非同次方程式――である．（2.2.4.20）の解全体のなす集合が（4.8.9）であるとする．（4.8.9）の元を（4.8.10）で記述する．（4.8.11）と（4.8.12）が成立することは，重ね合わせの原理と呼ぶものである．ただし，（4.8.12）の $\alpha$ は実数の係数である．この原理では，（2.2.4.20）の任意個の解の勝手な一次結合は（2.2.4.20）の解となる．

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)\times q(t) + \mathrm{g}(t) \cdots (4.8.7)$$

$$\mathrm{g}(t) \cdots (4.8.8)$$

$$Q_0 \cdots (4.8.9)$$

$$\forall x_0, y_0 \in Q_0 \cdots (4.8.10)$$

$$\frac{\mathrm{d}(x_0 + y_0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t}$$
$$= A(t)x_0 + A(t)y_0 = A(t)(x_0 + y_0) \cdots (4.8.11)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\alpha\times x_0)}{\mathrm{d}t} = \alpha\times\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}$$
$$= \alpha\times A(t)x_0 = A(t)(\alpha\times x_0) \cdots (4.8.12)$$

（4.8.7）の解全体のなす集合が（4.8.13）であるとする．（4.8.13）の元を（4.8.14）で記述する．（4.8.7）の解で（4.8.15）の計算が成立する．（4.8.15）の左辺と右辺から（4.8.16）が成立する．

$$Q \cdots (4.8.13)$$

$$\forall x, y \in Q \cdots (4.8.14)$$

$$\frac{\mathrm{d}(x - y)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$
$$= A(t)\times x - A(t)\times y = A(t)\times(x - y) \cdots (4.8.15)$$

$$\forall x - y \in Q_0 \cdots (4.8.16)$$

（2.2.4.20）から，（2.2.4.2）～（2.2.4.19）が線形性を示すことがわかる．（2.2.4.1）は心臓周期の間中，成立するものとしている．（2.2.4.2）～（2.2.4.10）の総和は，（2.2.4.1）を満足する．また，（2.2.4.11）～（2.2.4.19）の総和は，（2.2.4.1）を満足する．（2.2.4.1）を保証する際にキルヒホッフの第一法則――あるいは KCL――を満足している．連立微分方程式群の（2.2.4.2）～（2.2.4.19）は各コンプライアンスの血流量の流入出を記述している．これらの各微分方程式の左辺と右辺の記述は，図 2.1 でキルヒホッフの第一法則である電流連続の法則を記述している．この電流連続の法則は次のように解釈できる．連立微分方程式群の（2.2.4.2）～（2.2.4.19）の左辺は各コンプライアンスの血液量の時間に対する変化率である．それらの右辺の一つの括弧内は各コンプライアンスに隣り合うコンプライアンスから流出する血流量である．あるいは、それらの右辺の

他の括弧内は隣り合うコンプライアンスへ流入する血流量である．連立微分方程式群の（2.2.4.2）～（2.2.4.19）の右辺は二項ごとに括弧で括っている．一般的にこの括弧で括られた二つの項は，各コンプライアンスへの血液の流入あるいは流出を二つの項で記述している．各括弧の中のはじめの項にマイナスがついている場合は，一般に血液の流出を意味する方である．各括弧の中のはじめの項にマイナスがついていない場合は，一般に血液が流入する方である．

（2.2.4.2）～（2.2.4.19）の各括弧の中は各コンプライアンスに接続している流れの抵抗の血流量――図 2.4 では電流――である．このために，各括弧内の流れの抵抗を括弧の外に出すと，括弧内にはその流れの抵抗の内圧差――図 2.4 では電位差――になる．この内圧差の記述は電気回路論でのキルヒホッフの第二法則――あるいは KVL――となる．

図 2.1 の（2.2.4.2）～（2.2.4.19）で説明したキルヒホッフの法則の電流連続の法則と電圧平衡の法則は以下の導入で記述できた．図 2.4，線形素子――コンプライアンスと流れの抵抗――および線形性の回路――BC1――の導入で可能なキルヒホッフの法則の導入である．

## 4.9　シミュレーションに使った連立微分方程式についての考察

（2.2.4.28）～（2.2.4.45）から（2.2.4.24）～（2.2.4.27）を除けば（2.2.4.2）～（2.2.4.19）にある微分方程式と同様である．（2.2.4.22）と（2.2.4.23）を仮定して（2.2.4.28）～（2.2.4.45）を導出している．そして，(2.2.4.22)と（2.2.4.23）の左辺を（2.2.4.24）～（2.2.4.27）の右辺に記述することで（2.2.4.20）の微分方程式とは異なる記述になる．

また，図 2.1 のコンプライアンスと流れの抵抗をすべて時変型にした場合は，（2.2.4.28）～（2.2.4.45）と同類の数学的記述ができる．しかし，このような連立微分方程式群は本論文の対象となっていない．

（2.2.4.28）～（2.2.4.45）は（4.9.1）の特別な場合にあたる．4.9 では（4.9.1）から解の一意性について考察して（2.2.4.28）～（2.2.4.45）の一般的な線形微分方程式系の記述をする．その後，さらに（2.2.4.28）～（2.2.4.45）を発展させた微分方程式系について考察する．

（4.9.1）のベクトル値関数は時間 $t$ に依存する．その値は n 次元 Euclid 空間にとる．（4.9.1）の右辺の定義域は（4.9.2）である．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)) \cdots (4.9.1)$$

$$(t, \boldsymbol{x}) \in (-\infty, \infty) \times \boldsymbol{R}^n \cdots (4.9.2)$$

（4.9.3）では，（4.9.1）の任意の解に対して $t$ に依存しないある定数 $L>0$ である．（4.9.1）の右辺が，大域的に Lipschitz 条件（4.9.3）を満足するものとする．

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t))\| \le L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \cdots (4.9.3)$$

（4.9.1）は $t$ について連続である．初期条件とする（4.9.4）を満足する解は，任意に与えた有限区間[ $t_0$， $t_0+\alpha$]に一意に存在することが微分方程式論で論じられている[9)]．ただし，$\alpha>0$ とする．

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0 \cdots (4.9.4)$$

この解の一意性を前提に（2.2.4.28）～（2.2.4.45）を線形微分方程式系（4.9.5）として考察する．（4.9.5）の行列は付録２のようになる．血液量の行列は（a.2.1）である．（a.2.2）は強制項と呼ばれる．（a.2.3）と（a.2.4）は収縮期のときの行列である．（a.2.5）と（a.2.6）は拡張期のときの行列である．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{u}(t) \cdots (4.9.5)$$

3 章の計算結果から考察すると，(4.9.5) は周期解 (4.9.6) をもつものと著者は考える．(4.9.6) の $T$ は周期とする．ここで，(4.9.5) の解を（4.9.6）と仮定する．(4.9.6) を得る際に使った初期条件を（4.9.7）と仮定する．約 300 以上の 3 章のような数値解析の計算を著者が行った．これらの計算結果での各初期値のすべての非定常解は同じ定常解 (4.9.6) に近づいていくようであった．このことから著者は次のように考察した．(4.9.8) を初期値に与える摂動とする．(4.9.7) の右辺に摂動（4.9.8）を加えると（4.9.9）に記述できる．この場合にはヒトの体で保有可能となる循環血液量を初期値にするものと定める．このとき，初期条件（4.9.9）を満足する (4.9.5) の解は (4.9.6) に近づくものと著者は考える．

このことは次のように言えるものと著者は考える．(4.9.6) に対応する閉曲線 K があるものとする．K の近傍に初期値――(4.9.9) の右辺――をもつ場合は（4.9.5）のすべての非定常解は閉曲線に無限に長い時間にわたって近づいていく．これらの解の曲線から (4.9.6) は安定な解であるものと考えることができる．

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}(t+T) \cdots (4.9.6)$$

$$\boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}^0 \cdots (4.9.7)$$

$$\boldsymbol{q}_\varepsilon \cdots (4.9.8)$$

$$\boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}^0 + \boldsymbol{q}_\varepsilon \cdots (4.9.9)$$

次の計算では (4.9.6) はリャプーノフの意味で安定であり，さらに漸近安定である．(4.9.7) の場合の (4.9.5) の解を (4.9.10) とする．(4.9.11) の右辺は (4.9.7) の初期値とは異なるものである．(4.9.12) が成立すらならば (4.9.13) はすべての (4.9.14) で定義されている．このことから，(4.9.7) をもつ (4.9.5) の解 (4.9.15) もすべての (4.9.14) で定義されている．(4.9.16) に対して適当な (4.9.17) を満たすもので (4.9.18) になるとき (4.9.14) で (4.9.19) となる．このことは，(4.9.5) の解 (4.9.15) がリャプーノフの意味で安定であるといえる．

$$\boldsymbol{q}(t, t_0, \boldsymbol{q}^0) \cdots (4.9.10)$$

$$\boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}^1 \cdots (4.9.11)$$

$$\left|\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0\right| < \rho, \rho > 0 \cdots (4.9.12)$$

$$\boldsymbol{q}(t, t_0, \boldsymbol{q}^1) \cdots (4.9.13)$$

$$t \ge t_0 \cdots (4.9.14)$$

$$\boldsymbol{q}(t) \cdots (4.9.15)$$

$$\varepsilon > 0 \cdots (4.9.16)$$

$$0 < \delta \le \rho \cdots (4.9.17)$$

$$\left|\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0\right| < \delta \cdots (4.9.18)$$

$$\left|\boldsymbol{q}(t, t_0, \boldsymbol{q}^1) - \boldsymbol{q}(t)\right| < \varepsilon \cdots (4.9.19)$$

(4.9.20) が存在するとき (4.9.21) が成立するならば，(4.9.22) のとき (4.9.23) となる．このことは，リャプーノフの意味で安定な (4.9.5) の (4.9.15) が漸近安定であるといえる．

$$0 < \sigma \le \rho \cdots (4.9.20)$$

$$\left|\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0\right| < \sigma \cdots (4.9.21)$$

$$t \to \infty \cdots (4.9.22)$$

$$\left|\boldsymbol{q}(t, t_0, \boldsymbol{q}^1) - \boldsymbol{q}(t)\right| \to 0 \cdots (4.9.23)$$

この安定であると論じた解は次のように解の一意性が保証されている．(a.2.3) と (a.2.5) の各成分は連続で有界である．このことで (4.9.5) の右辺は大域的に Lipschitz 条件を満足する．この前提では，(4.9.5) の

解は[ $t_0$, ∞) で一意に存在することが微分方程式論では認められている.

しかし, ここからはもう少し (4.9.5) を発展させた線形時変システム (4.9.24) の線形微分方程式系を考察する. (4.9.25), (4.9.26) および強制項のすべての成分は有界であり, 連続とする. また, (4.9.25), (4.9.26) および強制項のすべての成分の関数は周期関数であり, かつ心臓周期の区間内で定義する. (4.9.24) の解および行列のすべての成分の周期は等しいものとする.

ただし, (4.9.24) の行列の成分は付録 3 の (a.3.1) ～ (a.3.26) あるいは (a.3.27) ～ (a.3.52) のようにする. (a.3.1) ～ (a.3.26) と (a.3.27) ～ (a.3.52) では強制項の与え方が異なる. コンプライアンスは (2.2.1.1) で与える. 流れの抵抗は (2.2.2.1) で与える.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}(t) + \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{q}(t) \end{cases} \cdots (4.9.24)$$

$$\boldsymbol{B}(t) \in \boldsymbol{R}^{n \times n} \cdots (4.9.25)$$

$$\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{R}^{n \times r} \cdots (4.9.26)$$

最初に (4.9.24) の解の安定性について考察する. 次に, (4.9.24) の構造安定性について考察する. ここから (4.9.24) を考察する際には (4.9.27) と (4.9.28) を仮定する. ただし, (4.9.28) では k＝n のときは k+1 は 1 となる. 一般的には (4.9.24) に仮想的に設定する血流路があり, 仮想的でない部位は心室, 心房および上行大動脈となる.

$$q_k(t) = c_k(t) \times p_k(t) \cdots (4.9.27)$$

$$r_k = \frac{p_k(t) - p_{k+1}(t)}{i_k} \cdots (4.9.28)$$

(4.9.24) の解の安定性について考察する. 最初に, 解が周期解であることを考察する. その後に、その周期解の安定性について考察する.

(4.9.24) の微分方程式の非斉次方程式の解と斉次方程式の解の関係は (4.8.14) と (4.8.16) のような関係があり, 次のようになる. (4.9.29) は (4.9.24) の斉次方程式の解全体のなす集合である. (4.9.30) は (4.9.24) の非斉次方程式の解全体のなす集合である. (4.9.30) の要素を (4.9.31) で記述する. (4.9.32) のように (4.9.29) と (4.2.30) の関係がある.

$$Q_0 \cdots (4.9.29)$$

$$Q \cdots (4.9.30)$$

$$\forall \boldsymbol{q}^g \in Q \cdots (4.9.31)$$

$$Q = \boldsymbol{q}^g + Q_0 = \left\{ \boldsymbol{q}^g + \boldsymbol{q}^b \middle| \forall \boldsymbol{q}^b \in Q_0 \right\} \cdots (4.9.32)$$

(4.9.32) から (4.9.33) が記述できる. (4.9.24) の時間の周期係数行列は (4.9.34) になる. (4.9.34) の $T$ は周期である. (4.9.34) の成分は周期関数あるいは定数のどちらかである. この場合は (4.9.35) の解は周期関数であると仮定する. (4.9.27) の右辺は周期関数と周期関数の積である. このことから, (4.9.27) の左辺は周期関数となる. この (4.9.27) の左辺を成分とするものが (4.9.33) の左辺の成分であると著者は考える. (4.9.35) は (4.9.24) の同次方程式であるので (4.9.35) の右辺は周期関数を成分とする行列の積として仮定することができる. 周期関数と周期関数の積が周期関数となることはこの後 4.9 で示す.

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^g + \boldsymbol{q}^b \cdots (4.9.33)$$

$$\boldsymbol{B}(t+T) = \boldsymbol{B}(t) \cdots (4.9.34)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}(t) \cdots (4.9.35)$$

(4.9.36) と (4.9.37) の周期関数があるものとする. (4.9.36) と (4.9.37) から (4.9.38) は明らかである. (4.9.38) から (4.9.39) となり, 周期関数と周期関数の差は周期関数と

なることが分かる.

$\kappa(t+T)=\kappa(t)\cdots(4.9.36)$

$\lambda(t+T)=\lambda(t)\cdots(4.9.37)$

$\chi(t)=\kappa(t)-\lambda(t)=\kappa(t+T)-\lambda(t+T)\cdots(4.9.38)$

$\chi(t)=\chi(t+T)\cdots(4.9.39)$

（4.9.33）から（4.9.40）が記述できる.（4.9.40）の左辺は周期関数である.(4.9.40) から（4.9.41）が成立する.（4.9.40）の左辺の周期性から（4.9.40）と（4.9.41）が等しくなり（4.9.42）を記述できる.（4.9.42）から（4.9.40）の右辺の第一項と第二項は周期関数であることが考えられる.（4.9.43）が零であるならば,（4.9.43）の関数は周期関数である.

$$\boldsymbol{q}^b(t)=\boldsymbol{q}(t)-\boldsymbol{q}^g(t)\cdots(4.9.40)$$

$$\boldsymbol{q}^b(t+T)=\boldsymbol{q}(t+T)-\boldsymbol{q}^g(t+T)\cdots(4.9.41)$$

$$\boldsymbol{q}(t+T)-\boldsymbol{q}^g(t+T)=\boldsymbol{q}(t)-\boldsymbol{q}^g(t)\cdots(4.9.42)$$

$$\boldsymbol{q}(t+T)-\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{q}^g(t+T)-\boldsymbol{q}^g(t)\cdots(4.9.43)$$

（4.9.43）が零に等しいことを考察するために（4.9.24）の非斉次方程式（4.9.44）の解について考える.（4.9.44）の同次方程式（4.9.35）の解の基本系を（4.9.45）とする.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}(t)+\boldsymbol{v}(t)\cdots(4.9.44)$$

$\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t)\cdots(4.9.45)$

（4.9.46）を（4.9.35）の解の基本行列とする. このとき,（4.9.47）は（4.9.46）の逆行列である.（4.9.48）は（4.9.44）の解の成分表示である.

$$\Phi(t)=(\varphi_j^i(t))\cdots(4.9.46)$$

$$\Phi^{-1}(t)\cdots(4.9.47)$$

$$q_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i(t)c_j(t),i=1,\cdots,n,\cdots(4.9.48)$$

この成分表示をベクトルの記法で記述すると（4.9.49）になる.（4.9.49）は（4.9.50）を使うことで（4.9.51）に記述できる.（4.9.24）と（4.9.44）の右辺を比較すると（4.9.52）となる.

$$\boldsymbol{q}=\Phi(t)\boldsymbol{c}(t)\cdots(4.9.49)$$

$$\boldsymbol{c}=\int\Phi^{-1}(\tau)\boldsymbol{v}(\tau)d\tau\cdots(4.9.50)$$

$$\boldsymbol{q}=\Phi(t)\int\Phi^{-1}(\tau)\boldsymbol{v}(\tau)d\tau\cdots(4.9.51)$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t)\cdots(4.9.52)$$

（4.9.49）の右辺が周期関数になるかを考察する.（4.9.46）は周期関数である.（4.9.52）の右辺の強制項は内圧の周期関数である. このために,(4.9.52) の右辺は周期関数である.（4.9.46）の成分は周期関数か定数のどちらかであるので（4.9.46）の逆行列も周期関数となる.

このことは,次のように考察できる.(4.9.36) と（4.9.37）の積を（4.9.53）のように計算する. このとき,（4.9.54）のように周期関数である. 逆行列を計算する際に（4.9.38）と（4.9.54）から,（4.9.47）の成分は周期関数となるものと著者は考える.ただし,(4.9.46) の逆行列が存在する場合である.

$\eta(t)=\kappa(t)\times\lambda(t)=\kappa(t+T)\times\lambda(t+T)\cdots(4.9.53)$

$\eta(t)=\eta(t+T)\cdots(4.9.54)$

（4.9.50）の右辺は周期関数を積分することになる. 周期関数からつくったはフーリエ級数が, 一様に収束するならば項別積分可能である. 級数が一様収束しない場合でも（4.9.55) を満足するｎに無関係な $M$ が存在すれば項別積分可能である.ただし,(4.9.55) の左辺は級数の部分和の絶対値であり, 区間は積分区間である.

このために（4.9.50）の左辺は周期関数であると著者は考える.

$$|s_n(t)|<M,(t\in[a,b])\cdots(4.9.55)$$

（4.9.46）と（4.9.50）が周期関数であることから（4.9.54）を使うと（4.9.49）の右辺は周期関数となる．(4.9.49）は（4.9.44）の解である．このことから（4.9.43）の左辺は（4.9.56）になる．(4.9.56）から（4.9.57）になる．(4.9.57）から（4.9.44）の解は周期解であるが，(4.9.57）は解の一意性まで記述していない．ただし，平衡点で（4.9.57）は成立するが，ここまでの議論では平衡点で著者は論じていない．

$$\boldsymbol{q}(t+T)-\boldsymbol{q}(t)=\boldsymbol{q}^{g}(t+T)-\boldsymbol{q}^{g}(t)=0\cdots(4.9.56)$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{q}(t+T)=\boldsymbol{q}(t)\\ \boldsymbol{q}^{g}(t+T)=\boldsymbol{q}^{g}(t)\end{cases}\cdots(4.9.57)$$

（4.9.57）は（4.9.24）の非斉次方程式の解である．(4.9.24）の非斉次方程式の周期係数行列の各成分は連続で有界である．このために，(4.9.24) の非斉次方程式の右辺は大域的に Lipschitz 条件を満足する．したがって，（4.9.24）の微分方程式の解は$[t_0$，∞）で一意に存在する．ただし，$t_0$は初期条件の時刻である．

解が一意に存在する初期条件の時刻と初期値が不明である．

次に，この初期条件について考察する．線形時変システム（4.9.24）では（4.9.27）と（4.9.28）が成立することは既に仮定した．この仮定の成立で強制項の内圧の周期関数が一意に定まればコンプライアンス（2.2.1.1）に依存して，解となる血液量は一意に定まる．このことから，初期値が(4.9.27)の近傍にあるならば周期解に対応する閉曲線に無限に長い時間にわたって近づいていくものと著者は考える．(4.9.27）と（4.9.28）が近似的に成立する場合でも同様に，（4.9.27）の右辺の閉曲線に近づいていくものと著者は考える．心臓周期の時間に対応した上で，収縮期と弛緩期の区分を初期条件の時刻で与える．このことで周期解であるので，解は周期にしたがって同様の値を無限にとることになる．

最後に解の安定性について考察する．ここまで，周期解かつその周期解の一意性について論じた．このことから，この周期解はリャプーノフの意味で安定であり，かつ漸近安定であるものと著者は考える．初期値が (4.9.27) の閉曲線の近傍に存在するならば（4.9.18）のような関係が成立し，(4.9.19) のようにリャプーノフの意味で安定である．また，同様の初期値の条件でも（4.9.21）のような関係が成立し，(4.9.23)のように漸近安定である．

（4.9.24）の非斉次方程式の構造安定性について考察する．(4.9.24）の係数行列および強制項の成分の関数および定数に摂動を与える．4.9 で与える摂動の行列のすべての成分は有界で連続な周期関数であり，心臓周期の区間内で定義する．この摂動の周期は（4.9.24）の周期と等しいものとする．

（4.9.58）は（4.9.24）の非斉次方程式の強制項に与える摂動とする．(4.9.58）をその非斉次方程式に代入すると(4.9.59)になる．（4.9.59）の周期係数行列は有界で連続な関数をすべての成分とする．このことは，(4.9.59)の右辺が大域的に Lipschitz 条件を満足する．このために初期条件に対して（4.9.59）の解は一意性を保証される．

$$\boldsymbol{u}_{\varepsilon}(t)\cdots(4.9.58)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{\mathrm{u}}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_{\mathrm{u}}(t)+\boldsymbol{D}\times\left(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_{\varepsilon}(t)\right)\cdots(4.9.59)$$

（4.9.60) は (4.9.58) の成分である．(4.9.59) では（4.9.27）から（4.9.61）が記述できる．（4.9.62）を定めると（4.9.27）と（4.9.61）から（4.9.63）が導出できる．(4.9.62）の左辺は周期関数である．(4.9.63）の右辺は周期関数となる．このことから，(4.9.63）の右辺の第二項が摂動の内圧の関数で算出した項である．(4.9.63）の第二項はコンプライアンスの内圧（4.9.60）とそのコンプライアンス

で計算できる．摂動（4.9.60）を十分に小さくすることで（4.9.63）の右辺の第二項を微小にできる．

$p_{\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.60)$

$c_k(t)\times(p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t))$
$=c_k(t)\times p_k(t)+c_k(t)\times p_{\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.61)$

$q_{\mathrm{p}\varepsilon k}(t)=c_k(t)\times p_{\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.62)$

$c_k(t)\times p_k(t)+c_k(t)\times p_{\varepsilon k}(t)$
$=q_k(t)+q_{\mathrm{p}\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.63)$

（4.9.58）の摂動を与えた影響を，（4.9.59）の解で観察することになる．流れの抵抗の血流量では（4.9.28）を使って（4.9.64）のように摂動の計算をする．（4.9.64）から（4.9.65）が記述できる．（4.9.66）を定めると（4.9.28）と（4.9.65）から（4.9.67）が導出できる．（4.9.67）の第一項と第二項の分子は周期関数である．（4.9.76）の右辺の第二項が摂動の内圧の関数で算出した項である．その流れの抵抗の添え字とその次の添え字の（4.9.28）の内圧の摂動の差とその流れの抵抗から(4.9.67)の右辺の第二項を算出する．その流れの抵抗の添え字とその次の添え字の（4.9.28）の内圧の摂動の差を十分に小さくすることで（4.9.67）の右辺の第二項を微小にできる．

$$\frac{(p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t))-(p_{k+1}(t)+p_{\varepsilon k+1}(t))}{r_k}$$
$$=\frac{(p_k(t)-p_{k+1}(t))+(p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t))}{r_k}\cdots(4.9.64)$$

$$\frac{(p_k(t)-p_{k+1}(t))+(p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t))}{r_k}$$
$$=\frac{p_k(t)-p_{k+1}(t)}{r_k}+\frac{p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)}{r_k}\cdots(4.9.65)$$

$$i_{\varepsilon k}(t)=\frac{p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)}{r_k}\cdots(4.9.66)$$

$$\frac{p_k(t)-p_{k+1}(t)}{r_k}+\frac{p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)}{r_k}$$
$$=i_k(t)+i_{\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.67)$$

（4.9.59）の解について非斉次方程式の解として考察する．（4.9.44）と（4.9.59）を比較すると（4.9.52）を（4.9.68）のように記述できる．（4.9.68）を（4.9.50）に代入すると（4.9.69）を導出できる．（4.9.70）のように定めると（4.9.69）は（4.9.71）の右辺のように記述できる．（4.9.71）の右辺の第一項は強制項の摂動がない場合の計算である．（4.9.71）の右辺の第二項は強制項の摂動から算出できる項である．（4.9.71）を（4.9.69）に代入すると（4.9.72）になる．（4.9.72）を成分表示すると（4.9.73）になる．（4.9.73）の右辺は（4.9.74）のように記述できる．（4.9.74）の右辺は強制項の摂動がない場合とその摂動がある場合の項に分けることができる．（4.9.75）を定めると（4.9.74）は（4.9.76）になる．摂動（4.9.58）を十分小さくすることで（4.9.76）の右辺の第二項を微小にできるものと著者は考える．

$$\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_{\varepsilon}(t))\cdots(4.9.68)$$

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{u}}=\Phi(t)\int\Phi^{-1}(\tau)\times\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_{\varepsilon}(t))d\tau\cdots(4.9.69)$$

$$\boldsymbol{c}_{\mathrm{u}\varepsilon}=\int\Phi^{-1}(\tau)\times\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}_{\varepsilon}(\tau)d\tau\cdots(4.9.70)$$

$$\int\Phi^{-1}(\tau)\times\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_{\varepsilon}(\tau))d\tau$$
$$=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}_{\mathrm{u}\varepsilon}\cdots(4.9.71)$$

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{u}}=\Phi(t)(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}_{\mathrm{u}\varepsilon})\cdots(4.9.72)$$

$$q_{\mathrm{u}i}(t)=$$
$$\sum_{j=1}^{\mathrm{n}}\varphi_j^i(t)(c_j(t)+c_{\mathrm{u}\varepsilon j}(t)),i=1,\cdots,\mathrm{n},\cdots(4.9.73)$$

$$q_{\mathrm{u}i}(t)=\sum_{j=1}^{\mathrm{n}}\varphi_j^i(t)c_j(t)+\sum_{j=1}^{\mathrm{n}}\varphi_j^i(t)c_{\mathrm{u}\varepsilon j}(t)\cdots(4.9.74)$$

$$q_{\mathrm{u}\varepsilon i}(t)=\sum_{j=1}^{\mathrm{n}}\varphi_j^i(t)c_{\mathrm{u}\varepsilon j}(t)\cdots(4.9.75)$$

$$q_{\mathrm{u}i}(t)=q_i(t)+q_{\mathrm{u}\varepsilon i}(t)\cdots(4.9.76)$$

（4.9.63）と（4.9.67）では数学的モデルの心臓－血管系の回路要素に対する摂動（4.9.59）の数学での計算を考察した．（4.9.76）では非斉次方程式の解として摂動

（4.9.58）の数学での計算を考察した．（4.9.63），（4.9.67）および（4.9.76）から強制項のみの十分に小さい摂動ならば(4.9.59)の解の変動は微小であるものと著者は考える．

（4.9.24）の周期係数行列に与えた摂動は(4.9.77)である．（4.9.24）の周期係数行列に（4.9.77）を加えると（4.9.78）を記述できる．（4.9.78）の周期係数行列は有界で連続な関数をすべての成分とする．このことは，（4.9.78)の右辺が大域的に Lipschitz 条件を満足する．このために初期条件に対して（4.9.78）の解は一意性を保証される．

$$\boldsymbol{B}_{\varepsilon}(t)\cdots(4.9.77)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)}{\mathrm{d}t}= \left(\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}_{\varepsilon}(t)\right)\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t)\cdots(4.9.78)$$

（4.9.79）は（4.9.77）の成分を記述するコンプライアンスの関数である．（4.9.27）を使うと（4.9.79）の摂動の計算は（4.9.80）で出来る．（4.9.81）を定めると（4.9.80）から（4.9.82）が導出できる．（4.9.82）の右辺の第二項は（4.9.79）とそのコンプライアンスの内圧で計算できる．摂動（4.9.79）を十分に小さくすることで（4.9.82）の第二項を微小にできる．

$$c_{\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.79)$$

$$\left(c_k(t)+c_{\varepsilon k}(t)\right)\times p_k(t) = c_k(t)\times p_k(t)+c_{\varepsilon k}(t)\times p_k(t)\cdots(4.9.80)$$

$$q_{\mathrm{c}\varepsilon k}(t)=c_{\varepsilon k}(t)\times p_k(t)\cdots(4.9.81)$$

$$c_k(t)\times p_k(t)+c_{\varepsilon k}(t)\times p_k(t) = q_k(t)+q_{\mathrm{c}\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.82)$$

（4.9.83）は（4.9.77）の成分を記述する流れの抵抗である．(4.9.28) を使うと (4.9.83) の摂動の計算は（4.9.84）～（4.9.86）で出来る．（4.9.84）と（4.9.85）には（4.9.87）が記述してある．(4.9.87) の分母の第二項に流れの抵抗に与えた摂動が記述してある．（4.9.83）の摂動は（4.9.88）を満足する．このとき，(4.9.89) が成立する．(4.9.83) は（4.9.90）を満足する．(4.9.83) の摂動を十分小さくすることで（4.9.87）の値を 1 に近づけることができる．(4.9.86) には添え字が $k$−1 の (4.9.83) を記述している．(4.9.88) ～（4.9.90）の計算は添え字が $k$−1 の場合も同様である．

$$r_{\mathrm{B}\varepsilon k}\cdots(4.9.83)$$

$$\frac{p_k(t)-p_{k+1}(t)}{r_k}\times\frac{r_k}{r_k+r_{\mathrm{B}\varepsilon k}}\cdots(4.9.84)$$

$$\frac{p_k(t)}{r_k}\times\frac{r_k}{r_k+r_{\mathrm{B}\varepsilon k}}\cdots(4.9.85)$$

$$\frac{p_k(t)}{r_{k-1}}\times\frac{r_{k-1}}{r_{k-1}+r_{\mathrm{B}\varepsilon k-1}}\cdots(4.9.86)$$

$$\frac{r_k}{r_k+r_{\mathrm{B}\varepsilon k}}\cdots(4.9.87)$$

$$0\le r_{B\varepsilon k}<\infty\cdots(4.9.88)$$

$$\lim_{r_{\mathrm{B}\varepsilon k}\to\infty}\frac{r_k}{r_k+r_{\mathrm{B}\varepsilon k}}=0\cdots(4.9.89)$$

$$0<\frac{r_k}{r_k+r_{\mathrm{B}\varepsilon k}}\le 1\cdots(4.9.90)$$

（4.9.78）を（4.9.91）とする．（4.9.92）を定めると（4.9.91）から（4.9.93）を記述できる． (4.9.93) から (4.9.94) を記述する．(4.9.95) は (4.9.94) の左辺の第 $i$ 成分である．十分小さな任意の正数 $\varepsilon$ に対して（4.9.96）が成立するように摂動をとる．このとき，この摂動に対して（4.9.94）の右辺は微小になるものと著者は考える．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t) +\boldsymbol{B}_{\varepsilon}(t)\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)\cdots(4.9.91)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{B}}(t)=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t)\cdots(4.9.92)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{B}_{\varepsilon}(t)\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)\cdots(4.9.93)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\chi}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{B}_{\varepsilon}(t)\boldsymbol{q}_{\mathrm{B}}(t)\cdots(4.9.94)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{B}i}(t)}{\mathrm{d}t}-\chi_{\mathrm{B}i}\cdots(4.9.95)$$

$$0 < \left| \frac{dq_{Bi}(t)}{dt} - \chi_{Bi} \right| < \varepsilon \cdots (4.9.96)$$

（4.9.24）の強制項の係数に与える摂動は（4.9.97）である．（4.9.97）を（4.9.24）の強制項の係数に加えると（4.9.98）が記述できる．（4.9.99）は（4.9.97）の成分を記述する流れの抵抗である．（4.9.28）を使うと（4.9.99）の摂動の計算は（4.9.100）と（4.9.101）で出来る．(4.9.100) に (4.9.102) が記述してある．(4.9.103) を満足するとき（4.9.104）の計算が成立する．(4.9.102) は（4.9.105）を満足する．(4.9.103) の摂動を十分小さくすることで（4.9.102）の値を 1 に近づけることができる．(4.9.101) には添え字 $k$−1 の（4.9.99）を記述している．（4.9.102）～（4.9.105）の計算は添え字が $k$−1 の場合も同様である．

$$\boldsymbol{D}_{\varepsilon} \cdots (4.9.97)$$

$$\frac{d\boldsymbol{q}_D(t)}{dt} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_D(t) + (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}_{\varepsilon}) \times \boldsymbol{u}(t) \cdots (4.9.98)$$

$$r_{D\varepsilon k} \cdots (4.9.99)$$

$$\frac{p_k(t)}{r_k} \times \frac{r_k}{r_k + r_{D\varepsilon k}} \cdots (4.9.100)$$

$$\frac{p_k(t)}{r_{k-1}} \times \frac{r_{k-1}}{r_{k-1} + r_{D\varepsilon k-1}} \cdots (4.9.101)$$

$$\frac{r_k}{r_k + r_{D\varepsilon k}} \cdots (4.9.102)$$

$$0 \le r_{D\varepsilon k} < \infty \cdots (4.9.103)$$

$$\lim_{r_{D\varepsilon k} \to \infty} \frac{r_k}{r_k + r_{D\varepsilon k}} = 0 \cdots (4.9.104)$$

$$0 < \frac{r_k}{r_k + r_{D\varepsilon k}} \le 1 \cdots (4.9.105)$$

（4.9.44）と（4.9.98）を比較すると（4.9.52）を（4.9.106）に記述できる．（4.9.106）を（4.9.50）に代入すると（4.9.107）を導出できる．(4.9.108) のように定めると (4.9.107) から (4.9.109) の右辺のように記述できる．（4.9.109）の第一項は強制項の定数係数行列の摂動がない場合の計算である．（4.9.109）の第二項は強制項の定数係数行列の摂動から算出できる項である．（4.9.109）を（4.9.107）に代入すると（4.9.110）になる．(4.9.110) の成分表示は（4.9.111）になる．(4.9.111) は（4.9.112）に記述できる．（4.9.113）を定めると（4.9.112）は（4.9.114）に記述できる．（4.9.97）の摂動を十分に小さく与えると（4.9.114）の第二項は微小になるものと著者は考える．

$$\boldsymbol{v}(t) = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}_{\varepsilon}) \times \boldsymbol{u}(t) \cdots (4.9.106)$$

$$\boldsymbol{q}_D = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(\tau) \times (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}_{\varepsilon}) \times \boldsymbol{u}(\tau) d\tau \cdots (4.9.107)$$

$$\boldsymbol{c}_{D\varepsilon} = \int \Phi^{-1}(\tau) \times \boldsymbol{D}_{\varepsilon} \times \boldsymbol{u}(\tau) d\tau \cdots (4.9.108)$$

$$\int \Phi^{-1}(\tau) \times (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}_{\varepsilon}) \times \boldsymbol{u}(\tau) d\tau$$
$$= \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}_{D\varepsilon} \cdots (4.9.109)$$

$$\boldsymbol{q}_D = \Phi(t)(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c}_{D\varepsilon}) \cdots (4.9.110)$$

$$q_{Di}(t) =$$
$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i(t)(c_j(t) + c_{D\varepsilon j}(t)), i = 1, \cdots, n, \cdots (4.9.111)$$

$$q_{Di}(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i(t) c_j(t)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i(t) c_{D\varepsilon j}(t) \cdots (4.9.112)$$

$$q_{D\varepsilon i}(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i(t) c_{D\varepsilon j}(t) \cdots (4.9.113)$$

$$q_{Di}(t) = q_i(t) + q_{D\varepsilon i}(t) \cdots (4.9.114)$$

（4.9.77）と（4.9.97）の摂動を（4.9.24）に与えた非斉次方程式（4.9.115）を考察する．（4.9.115）の係数の成分は図 2.1 のような物理的モデルの回路要素のコンプライアンスと流れの抵抗に摂動を与えた場合である．

（4.9.115）の周期係数行列は有界で連続な関数をすべての成分とする．このことは，（4.9.115）の右辺が大域的に Lipschitz 条件を満足する．このために初期条件に対して

(4.9.115) の解は一意性を保証される.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\chi(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{B}_\varepsilon(t)\right)\boldsymbol{q}_\chi(t)$$
$$+\left(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}_\varepsilon\right)\times \boldsymbol{u}(t)\cdots(4.9.115)$$

(4.9.115) でコンプライアンス (4.9.27) に摂動を与える場合は (4.9.79) ～ (4.9.82) と同様である. (4.9.115) で流れの抵抗 (4.9.28) に摂動を与える場合はまだ考察していないので, ここで論じる.

(4.9.116) は流れの抵抗に与える摂動である. (4.9.28) から (4.9.117) が記述できる. (4.9.118) を (4.9.117) に記述してある. (4.9.116) は (4.9.119) を満足する. (4.9.118) で (4.9.120) が計算できる. (4.9.119) と (4.9.120) から (4.9.121) が成立する. (4.9.116) の摂動を十分小さくすることで (4.9.118) の値を 1 に近づけることができる. (4.9.77) と (4.9.97) を独立して与えた場合に対して次のように異なる. (4.9.115) では (4.9.85), (4.9.86), (4.9.100) および (4.9.101) の計算はなく, (4.9.117) の記述で計算できる. (4.9.78) や (4.9.98) では流れの抵抗に摂動を与えると図 2.1 のような循環系のモデルにある流れの抵抗に摂動 (4.9.83) あるいは (4.9.99) を与えたことにはならない.

$$r_{\varepsilon k}\cdots(4.9.116)$$

$$\frac{p_k(t) - p_{k+1}(t)}{r_k}\times\frac{r_k}{r_k + r_{\varepsilon k}}\cdots(4.9.117)$$

$$\frac{r_k}{r_k + r_{\varepsilon k}}\cdots(4.9.118)$$

$$0 \le r_{\varepsilon k} < \infty\cdots(4.9.119)$$

$$\lim_{r_{\varepsilon k}\to\infty}\frac{r_k}{r_k + r_{\varepsilon k}} = 0\cdots(4.9.120)$$

$$0 < \frac{r_k}{r_k + r_{\varepsilon k}} \le 1\cdots(4.9.121)$$

(4.9.115) を (4.9.122) とする. (4.9.123) を定めると (4.9.122) から (4.9.124) を記述できる. (4.9.125) は (4.9.124) の左辺の第 $i$ 成分である. 十分小さな任意の正数 $\varepsilon$ に対して (4.9.126) が成立するように摂動をとる. このとき, この摂動に対して (4.9.124) の右辺は微小になるものと著者は考える.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\chi(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_\chi(t) + \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t)$$
$$+\boldsymbol{B}_\varepsilon(t)\boldsymbol{q}_\chi(t) + \boldsymbol{D}_\varepsilon\times\boldsymbol{u}(t)\cdots(4.9.122)$$

$$\chi_\chi(t) = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_\chi(t) + \boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t)\cdots(4.9.123)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\chi(t)}{\mathrm{d}t} - \chi_\chi(t) = \boldsymbol{B}_\varepsilon(t)\boldsymbol{q}_\chi(t) + \boldsymbol{D}_\varepsilon\times\boldsymbol{u}(t)\cdots(4.9.124)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{\chi i}(t)}{\mathrm{d}t} - \chi_{\chi i}\cdots(4.9.125)$$

$$0 < \left|\frac{\mathrm{d}q_{\chi i}(t)}{\mathrm{d}t} - \chi_{\chi i}\right| < \varepsilon\cdots(4.9.126)$$

(4.9.58) と (4.9.97) の摂動を (4.9.24) に与えた非斉次方程式 (4.9.127) を考察する. (4.9.127) の周期係数行列は有界で連続な関数をすべての成分とする. このことは, (4.9.127) の右辺が大域的に Lipschitz 条件を満足する. このために初期条件に対して (4.9.127) の解は一意性を保証される.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\eta(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_\eta(t)$$
$$+\left(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}_\varepsilon\right)\times\left(\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\right)\cdots(4.9.127)$$

(4.9.28) を使うと (4.9.60) および (4.9.99) の摂動の計算は (4.9.128) および (4.9.129) で出来る. (4.9.102) は (4.9.128) に記述してある. (4.9.105) が成立することは既に (4.9.98) の非斉次方程式の考察で論じた. このことから, (4.9.98) の場合と同様に (4.9.102) を 1 に近づけることができる. (4.9.130) の分子の第二項の (4.9.58) を十分小さくすることで, (4.9.130) の摂動による変動は微小にすることができる. (4.9.129) には添え字 $k$−1 の (4.9.99) を記述している. (4.9.128) の計算は添え字が $k$−1 の場合も同様である.

$$\frac{p_k(t) + p_{\varepsilon k}(t)}{r_k}\times\frac{r_k}{r_k + r_{\mathrm{D}\varepsilon k}}\cdots(4.9.128)$$

$$\frac{p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t)}{r_{k-1}}\times\frac{r_{k-1}}{r_{k-1}+r_{\mathrm{D}\varepsilon k-1}}\cdots(4.9.129)$$

$$\frac{p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t)}{r_k}\cdots(4.9.130)$$

(4.9.44) と (4.9.127) を比較すると (4.9.52) を（4.9.131）に記述できる．(4.9.131）を（4.9.50）に代入すると（4.9.132）を導出できる．(4.9.133) のように定めると (4.9.132) から (4.9.134) の右辺のように記述できる．（4.9.134）の第一項は強制項（4.9.60）とその定数係数行列（4.9.99）の摂動がない場合の計算である．(4.9.134）の第二項は強制項とその定数係数行列の摂動から算出できる項である．(4.9.134）を（4.9.132）に代入すると（4.9.135）になる．(4.9.135）の成分表示は (4.9.136) になる．(4.9.136) は (4.9.137) に記述できる．（4.9.138）を定めると（4.9.137）は（4.9.139）に記述できる．（4.9.58）および（4.9.97）の摂動を十分に小さく与えると（4.9.139）の第二項は微小になるものと著者は考える．

$$\boldsymbol{v}(t)=(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}_\varepsilon)\times(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_\varepsilon(t))\cdots(4.9.131)$$

$$\boldsymbol{q}_\eta=\Phi(t)\times$$
$$\int\Phi^{-1}(\tau)(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}_\varepsilon)(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_\varepsilon(t))d\tau\cdots(4.9.132)$$

$$\boldsymbol{c}_{\eta\varepsilon}=$$
$$\int\Phi^{-1}(\tau)(\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)+\boldsymbol{D}_\varepsilon\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{D}_\varepsilon\boldsymbol{u}_\varepsilon(t))d\tau\cdots(4.9.133)$$

$$\int\Phi^{-1}(\tau)(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}_\varepsilon)(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_\varepsilon(t))d\tau$$
$$=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}_{\eta\varepsilon}\cdots(4.9.134)$$

$$\boldsymbol{q}_\eta=\Phi(t)(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}_{\eta\varepsilon})\cdots(4.9.135)$$

$$q_{\eta i}(t)=$$
$$\sum_{j=1}^{\mathrm{n}}\varphi_j^i(t)(c_j(t)+c_{\eta\varepsilon j}(t)),i=1,\cdots,\mathrm{n},\cdots(4.9.136)$$

$$q_{\eta i}(t)=\sum_{j=1}^{\mathrm{n}}\varphi_j^i(t)c_j(t)$$
$$+\sum_{j=1}^{\mathrm{n}}\varphi_j^i(t)c_{\eta\varepsilon j}(t)\cdots(4.9.137)$$

$$q_{\eta\varepsilon i}(t)=\sum_{j=1}^{\mathrm{n}}\varphi_j^i(t)c_{\eta\varepsilon j}(t)\cdots(4.9.138)$$

$$q_{\eta i}(t)=q_i(t)+q_{\eta\varepsilon i}(t)\cdots(4.9.139)$$

（4.9.58）と（4.9.77）の摂動を（4.9.24）に与えた非斉次方程式を考察する．（4.9.140）の周期係数行列は有界で連続な関数をすべての成分とする．このことは，（4.9.140）の右辺が大域的に Lipschitz 条件を満足する．このために初期条件に対して（4.9.140）の解は一意性を保証される．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\omega(t)}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}_\varepsilon(t))\boldsymbol{q}_\omega(t)$$
$$+\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_\varepsilon(t))\cdots(4.9.140)$$

コンプライアンスに与える摂動（4.9.79）と強制項の内圧に与える摂動（4.9.60）を（4.9.27) に使って (4.9.141) を記述できる．（4.9.142）を定めると（4.9.141）から（4.9.143）を記述できる．十分小さな（4.9.60）と（4.9.79）を与えると（4.9.143）の第二項は微小になる．

$$(c_k(t)+c_{\varepsilon k}(t))\times(p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t))$$
$$=c_k(t)\times p_k(t)+c_k(t)\times p_{\varepsilon k}(t)$$
$$+c_{\varepsilon k}(t)\times p_k(t)+c_{\varepsilon k}(t)\times p_{\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.141)$$

$$q_{\omega\varepsilon k}(t)=c_k(t)\times p_{\varepsilon k}(t)+c_{\varepsilon k}(t)\times p_k(t)$$
$$+c_{\varepsilon k}(t)\times p_{\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.142)$$

$$c_k(t)\times p_k(t)+c_k(t)\times p_{\varepsilon k}(t)$$
$$+c_{\varepsilon k}(t)\times p_k(t)+c_{\varepsilon k}(t)\times p_{\varepsilon k}(t)$$
$$=q_k(t)+q_{\omega\varepsilon k}(t)\cdots(4.9.143)$$

強制項の内圧に与える摂動（4.9.60）と流れの抵抗に与える摂動（4.9.83）を（4.9.28）に使って（4.9.145）と（4.9.146）を記述できる．(4.9.87）が（4.9.145）に記述してある．(4.9.87) は (4.9.90) を満足する．(4.9.83) を十分小さく与えるならば（4.9.87）を 1 に近づけることができる．（4.9.147）が（4.9.145）に記述してある．(4.9.147）の分子の第二項を十分小さく与えるならば（4.9.147）の摂動による変動を微小にすることができる．したがって，(4.9.60）と

（4.9.83）を十分小さく与えるならば（4.9.145）の摂動を微小にできる．(4.9.146）には添え字 $k$–1 の(4.9.83)を記述している．（4.9.145）の計算は添え字が $k$–1 の場合も同様である．

$$\frac{p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t)}{r_k}\times\frac{r_k}{r_k+r_{\mathrm{B}\varepsilon k}}\cdots(4.9.145)$$

$$\frac{p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t)}{r_{k-1}}\times\frac{r_{k-1}}{r_{k-1}+r_{\mathrm{B}\varepsilon k-1}}\cdots(4.9.146)$$

$$\frac{p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t)}{r_k}\cdots(4.9.147)$$

（4.9.140）を（4.9.148）とする．（4.9.149）を定めると（4.9.148）から（4.9.150）を記述できる．（4.9.151）は（4.9.150）の左辺の第 $i$ 成分である．十分小さな任意の正数 $\varepsilon$ に対して（4.9.152）が成立するように摂動をとる．このとき，この摂動に対して（4.9.150）の右辺は微小になるものと著者は考える．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\omega(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_\omega(t)+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t)$$
$$+\boldsymbol{B}_\varepsilon(t)\boldsymbol{q}_\omega(t)+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\cdots(4.9.148)$$

$$\boldsymbol{\chi}_\omega(t)=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_\omega(t)+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t)\cdots(4.9.149)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\omega(t)}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\chi}_\omega(t)=\boldsymbol{B}_\varepsilon(t)\boldsymbol{q}_\omega(t)+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\cdots(4.9.150)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{\omega i}(t)}{\mathrm{d}t}-\chi_{\omega i}\cdots(4.9.151)$$

$$0<\left|\frac{\mathrm{d}q_{\omega i}(t)}{\mathrm{d}t}-\chi_{\omega i}\right|<\varepsilon\cdots(4.9.152)$$

（4.9.58)，(4.9.77）および（4.9.97）の摂動を（4.9.24）に与えた非斉次方程式（4.9.153）を考察する．（4.9.153）の周期係数行列は有界で連続な関数をすべての成分とする．このことは，(4.9.153）の右辺が大域的に Lipschitz 条件を満足する．このために初期条件に対して（4.9.153）の解は一意性を保証される．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\gamma(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}_\varepsilon(t)\right)\boldsymbol{q}_\gamma(t)$$
$$+\left(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}_\varepsilon\right)\times\left(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\right)\cdots(4.9.153)$$

強制項の内圧に与える摂動 (4.9.60) と図 2.1 のような物理的モデルの流れの抵抗に与える摂動（4.9.116）を使って（4.9154）を記述する．（4.9.154）は（4.9.28）の計算である．(4.9.154) から (4.9.155) が記述できる．（4.9.155）の右辺の第一項と第二項を（4.9.156）の右辺のように書き直す．(4.9.156）の第一項と第二項には (4.9.118) が記述してある．（4.9.118）は（4.9.121）を満足する．（4.9.116）を十分小さく与えると（4.9.118）は 1 に近づけることができる．（4.9.156）の第二項には（4.9.157）が記述してある．（4.9.157）の分子には強制項の成分の摂動の差が記述してある．この強制項の添え字k とk+1 の内圧の差を十分小さく与えるならば（4.9.157）の値を微小にする．（4.9.118）と（4.9.157）から（4.9.157）の分子と（4.9.116）を十分小さく与えることができならば（4.9.156）の第二項を微小にできる．

$$\frac{\left(p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t)\right)-\left(p_{k+1}(t)+p_{\varepsilon k+1}(t)\right)}{r_k+r_{\varepsilon k}}=$$
$$\frac{\left(p_k(t)-p_{k+1}(t)\right)+\left(p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)\right)}{r_k+r_{\varepsilon k}}\cdots(4.9.154)$$

$$\frac{\left(p_k(t)-p_{k+1}(t)\right)+\left(p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)\right)}{r_k+r_{\varepsilon k}}$$
$$=\frac{p_k(t)-p_{k+1}(t)}{r_k+r_{\varepsilon k}}+\frac{p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)}{r_k+r_{\varepsilon k}}\cdots(4.9.155)$$

$$\frac{p_k(t)-p_{k+1}(t)}{r_k+r_{\varepsilon k}}+\frac{p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)}{r_k+r_{\varepsilon k}}=$$
$$\frac{p_k(t)-p_{k+1}(t)}{r_k}\times\frac{r_k}{r_k+r_{\varepsilon k}}$$
$$+\frac{p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)}{r_k}\times\frac{r_k}{r_k+r_{\varepsilon k}}\cdots(4.9.156)$$

$$\frac{p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)}{r_k}\cdots(4.9.157)$$

（4.9.154）の左辺を（4.9.158）のように仮定する．（4.9.158）から（4.9.159）が記述できる．（4.9.159）から（4.9.160）が導出でき

る．(4.9.160) が成立すると (4.9.158) が成立する．(4.9.160) の左辺は強制項の内圧の摂動 (4.9.60) の差と流れの抵抗の摂動 (4.9.116) の比が，強制項の内圧の差と流れの抵抗の比に等しい場合である．

$$\frac{\left(p_k(t)+p_{\varepsilon k}(t)\right)-\left(p_{k+1}(t)+p_{\varepsilon k+1}(t)\right)}{r_k+r_{\varepsilon k}} = \frac{\left(p_k(t)-p_{k+1}(t)\right)}{r_k}\cdots(4.9.158)$$

$$1+\frac{p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)}{p_k(t)-p_{k+1}(t)}=1+\frac{r_{\varepsilon k}}{r_k}\cdots(4.9.159)$$

$$\frac{p_{\varepsilon k}(t)-p_{\varepsilon k+1}(t)}{r_{\varepsilon k}}=\frac{p_k(t)-p_{k+1}(t)}{r_k}\cdots(4.9.160)$$

(4.9.153) を (4.9.161) とする．(4.9.162) を定めると (4.9.161) から (4.9.163) を記述できる．(4.9.164) は (4.9.163) の左辺の第 $i$ 成分である．十分小さな任意の正数 $\varepsilon$ に対して (4.9.165) が成立するように摂動をとる．このとき，この摂動に対して (4.9.163) の右辺は微小になるものと著者は考える．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\gamma(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_\gamma(t)+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{B}_\varepsilon(t)\boldsymbol{q}_\gamma(t) +\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)+\boldsymbol{D}_\varepsilon\times\left(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\right)\cdots(4.9.161)$$

$$\boldsymbol{\chi}_\gamma(t)=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{q}_\gamma(t)+\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}(t)\cdots(4.9.162)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_\gamma(t)}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\chi}_\gamma(t)=\boldsymbol{B}_\varepsilon(t)\boldsymbol{q}_\gamma(t) +\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)+\boldsymbol{D}_\varepsilon\times\left(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{u}_\varepsilon(t)\right)\cdots(4.9.163)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{\gamma i}(t)}{\mathrm{d}t}-\chi_{\gamma i}\cdots(4.9.164)$$

$$0<\left|\frac{\mathrm{d}q_{\gamma i}(t)}{\mathrm{d}t}-\chi_{\gamma i}\right|<\varepsilon\cdots(4.9.165)$$

線形時変システム (4.9.24) に添え字を付けて (4.9.166) に記述する．(4.9.166) の出力の左辺には添え字を付けていない．ただし，本論文で記述の対象となるシステムはヒトである．さらに，システムを記述する環境は日本の一般的な環境としている．

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_i(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}_i(t)\boldsymbol{q}_i(t)+\boldsymbol{D}_i\times\boldsymbol{u}_i(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{q}_i(t), i=1,2,\cdots,n\end{cases}\cdots(4.9.166)$$

(4.9.166) を使って，目標となる出力を得る線形時変システムを記述することを著者は考える．4.10.2 ではこの (4.9.166) を応用して図 2.1 のような物理的システムと対応を与えることを考察する．具体的なアルゴリズムは次のⅠ～Ⅲのようになる．

I. (4.9.166) の非斉次方程式の係数行列あるいは強制項に十分小さな摂動を与えた (4.9.167) のある時刻の定常解の値を次のⅡの計算の初期値にする．Ⅰの行列の添え字 $i$ に 1 を加算する．

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_i(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}_i(t)\boldsymbol{q}_i(t)+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{u}_i(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{q}_i(t), i=j\end{cases}\cdots(4.9.167)$$

II. Ⅰの非斉次方程式の係数行列あるいは強制項に十分小さな摂動を与える．この新しい非斉次方程式 (4.9.168) の添え字 $i$ はⅠの非斉次方程式の添え字に 1 を加算したものである．この新しい非斉次方程式で，Ⅰの計算で得た初期値を使って定常解を計算する．ある時刻のこの新しい定常解の値を次の計算の初期値にする．

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}_i(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}_i(t)\boldsymbol{q}_i(t)+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{u}_i(t)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{q}_i(t), i=j+1\end{cases}\cdots(4.9.168)$$

III. このⅠ～Ⅱの計算を繰り返し (4.9.166) の係数行列と強制項を替えて，目標となる出力を得る線形時変システムを求める．

上述のアルゴリズムⅠ～Ⅲを使って計算をするために次のような準備をする．(4.9.166) の非斉次方程式の右辺の仮定とその解のパラメータに対する連続性と微分可能性について考察する．(4.9.166) は係数行列のコンプライアンスと流れの抵抗，および強制項の内圧をパラメータとする．これらのパラメータの値と初期条件を替えて目標

となる出力を与えるシステムを，Ⅰ～Ⅲの計算で記述できるものと著者は考える．Ⅰ～Ⅲでは（4.9.166）の非斉次方程式の右辺のパラメータの値を替える際に係数行列と強制項の成分を他の周期関数や定数に替える．この成分を替える際には，各成分に心臓周期で定義した連続な周期関数を十分小さな摂動として与える．この摂動の与え方は（4.9.166）の非斉次方程式の右辺に，連続であることと大域的に Lipschitz 条件 (4.9.3) を満足する．さらに，その定常解は初期条件，時間 $t$ およびパラメータの関数となる．この出力の時間の関数として連続で微分可能でありながら各定常解が繋がる．このことから，これらの定常解の関数はパラメータに関して連続性があり，微分可能性をもつものと著者は考える．ただし，この連続性と微分可能性を証明するには非斉次方程式（4.9.166）の右辺の偏導関数を仮定することになる．以下では，この定常解のパラメータに関する連続性と微分可能性につていて考察する．

（4.9.166）の非斉次方程式のパラメータに関する解の連続性を考察した後に微分可能性を考察する．（4.9.166）の非斉次方程式を（4.9.169）のように記述する．

$$\dot{q}_i(t) = f_i(t, q_1, \cdots, q_n, \mu_1, \cdots, \mu_m)$$
$$,(i = 1, \cdots, n) \cdots (4.9.169)$$

（4.9.169）の右辺は$(t, q^1, \cdots, q^n, \mu^1, \cdots, \mu^m)$–空間 $R^0$ のある開集合 $\Gamma$ で定義しており連続であるとする．また，変数 $q^1$，…，$q^n$ に関する偏導関数（4.9.170）も $\Gamma$ で連続であるとする．

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j}, i,j = 1, \cdots, n, \cdots (4.9.170)$$

（4.9.171）および（4.9.172）を使って（4.9.169）をベクトルで記述すると（4.9.173）のようになる．

$$\boldsymbol{q} = (q_1, \cdots, q_n) \cdots (4.9.171)$$
$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \cdots (4.9.172)$$
$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu}) \cdots (4.9.173)$$

（4.9.166）非斉次方程式のパラメータに関する解の連続性を考察する．空間 $R^0$ の点を（4.9.174）で記述する．集合 $\Gamma$ に属する――初期値 $t_0$，$\boldsymbol{q}_0$ を固定した――点（$t_0$, $\boldsymbol{q}_0$, $\boldsymbol{\mu}$）の $\boldsymbol{\mu}$ 全体の集合をMとする．Mは$(\mu^1, \cdots, \mu^m)$–空間の開集合である．初期値 $t_0$，$\boldsymbol{q}_0$ をもつ（4.9.173）の延長不能な解を（4.9.175）とする．M の各点 $\boldsymbol{\mu}$ に（4.9.175）を対応させる．このときの（4.9.175）の定義区間を（4.9.176）とする．関数（4.9.175）が定義される対（4.9.177）全体の集合 W は$(t, \mu^1, \cdots, \mu^m)$–空間の開集合である．そして，（4.9.175）は集合 W 上で対（4.9.177）の連続関数である．

$$(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu}), \cdots (4.9.174)$$
$$\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}), \cdots (4.9.175)$$
$$m_1(\boldsymbol{\mu}) < t < m_2(\boldsymbol{\mu}) \cdots (4.9.176)$$
$$(t, \boldsymbol{\mu}), \cdots (4.9.177)$$

次に（4.9.169）の解のパラメータに関する微分可能性について考察する．初期値 $t_0$，$\boldsymbol{q}_0$ を固定したときの（4.9.173）の延長不能な解を（4.9.178）とする．（4.9.178）を$(t, \mu^1, \cdots, \mu^m)$–空間の開集合 W で定義する．（4.9.178）はその変数全体で――W で――連続である．

$$\boldsymbol{\psi}(t, \boldsymbol{\mu})$$
$$= (\psi_1(t, \boldsymbol{\mu}), \cdots, \psi_n(t, \boldsymbol{\mu})) \cdots (4.9.178)$$

（4.9.169）の右辺の $\Gamma$ で変数 $\mu^1$，…，$\mu^1$ の連続な偏導関数が存在するならば，偏導関数（4.9.179）は W 全体で存在する．また，（4.9.179）は W 全体で連続である．そして，偏導関数（4.9.180）も W 全体で存在する．かつ，（4.9.180）は連続であり，かつ偏微分の順序を変えたものに等しい．

$$\frac{\partial \psi_i(t, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_j}, i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, m, \cdots (4.9.179)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i(t,\boldsymbol{\mu})}{\partial t \partial \mu_j}, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m,\cdots(4.9.180)$$

### 4.10　増幅回路についての考察

4.10 では（2.2.4.28）～（2.2.4.45）あるいは（a.3.1）～（a.3.52）で強制項として解釈した内圧の関数について考える．ここでは，その強制項と対応する物理的モデルを与える試みをする．著者の新しい提案として,電子回路論での電圧制御電圧源との対応を,この物理的モデルに与える．このモデルを図 2.1 のモデルに接続することで，（2.2.4.28）～（2.2.4.45）を導出できるようになる．さらに,図 2.1 を発展させた循環系の回路モデルから数学的処理で（a.3.1）～（a.3.52）を導出することを試みる．

#### 4.10.1 ボルテージホロワと心臓–血管系

電子回路のボルテージホロワと呼ばれている演算増幅器に対応関係をもつ心臓–血管系の物理的モデルについて考察する．4.10.1 の回路モデルは 4.10.2 で使うことになる．

4.10.1 で，電子回路論の理想的な演算増幅器から本論文で使う電子回路の演算増幅器を著者が定めることにする．その定めた演算増幅器と対応関係をもつ心臓–血管系の新しいモデルについて考える．

図 4.10.1.1 は増幅回路の接続を説明している図である．図 4.10.1.1 では入力側に信号源を接続して，出力側に負荷を接続している．信号源には，電圧源と内部抵抗があるものとする．図 4.10.1.1 を使って入力インピーダンス・出力インピーダンス・電圧利得・電流利得・電力利得について論じる．ここで利得と呼んでいるものは，一般には増幅度とも呼ばれていることがある．

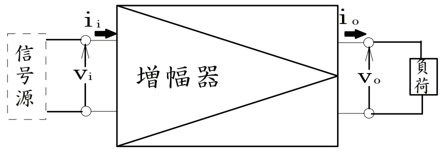

図 4.10.1.1　増幅回路の接続

入力インピーダンスは（4.10.1.1）で論じる．図 4.10.1.1 の入力側からみたインピーダンスである．

出力インピーダンスは（4.10.1.2）で論じる．図 4.10.1.1 の出力側からみたインピーダンスである．ただし，入力側の信号源の —— $v_{\mathrm{i}}$ でない——電圧源は 0 となり，出力側の負荷の代わりに電源 $v_{\mathrm{o}}$ を接続したもので，計算するものである．

電圧利得は (4.10.1.3) で論じる．図 4.10.1.1 の入力側の電圧と出力側の電圧の比である．

電流利得は (4.10.1.4) で論じる．図 4.10.1.1 の入力側の電流と出力側の電流の比である．

電力利得は (4.10.1.5) で論じる．図 4.10.1.1 の入力側の電力と出力側の電力の比である．

$$Z_{\mathrm{in}}=\frac{v_{\mathrm{i}}}{i_{\mathrm{i}}}\cdots(4.10.1.1)$$

$$Z_{\mathrm{o}}=\frac{v_{\mathrm{o}}}{-i_{\mathrm{o}}}\cdots(4.10.1.2)$$

$$A_{\mathrm{v}}=\frac{v_{\mathrm{o}}}{v_{\mathrm{i}}}\cdots(4.10.1.3)$$

$$A_{\mathrm{i}}=\frac{i_{\mathrm{o}}}{i_{\mathrm{i}}}\cdots(4.10.1.4)$$

$$A_p=\frac{v_{\mathrm{o}}\times i_{\mathrm{o}}}{v_{\mathrm{i}}\times i_{\mathrm{i}}}=A_{\mathrm{v}}\times A_{\mathrm{i}}\cdots(4.10.1.5)$$

演算増幅器の記号は図 4.10.1.2 で示すものがある．図 4.10.1.2 では極性を入力端子の符号で表現している．a の端子は逆相入力端子であり，b の端子は正相入力端子である．入力電圧と出力電圧の位相の関係は次のように電子回路論で論じられている．

入力端子ａとアース間に信号電圧を与えると出力端子ｃとアース間に入力電圧と逆相の出力電圧が生じる．入力端子ｂとアース間に信号電圧を与えると出力端子ｃとアース間に入力電圧と同相の出力電圧が生じる．

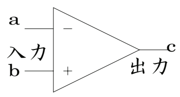


図 4.10.1.2 演算増幅器の記号

図 4.10.1.3 の演算増幅器の等価回路は演算増幅器の内部を表現している．ここで，演算増幅器は電圧利得 $A$・入力インピーダンス $Z_i$・出力インピーダンス $Z_o$ の増幅器である．

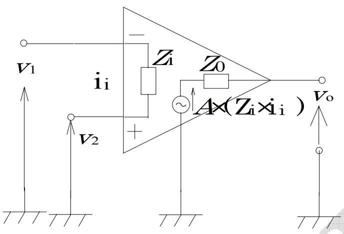


図 4.10.1.3 演算増幅器の等価回路

電子回路論で理想的な演算増幅器と呼ぶ場合は，$A\to\infty$・$Z_i\to\infty$・$Z_o=0$ と仮定したものである．理想的な演算増幅器にボルテージホロワと呼ばれるオペレーショナルアンプがある．図 4.10.1.4 はボルテージホロワの等価回路である．ボルテージホロワを前提として理想的な演算増幅器の（4.10.1.1）～（4.10.1.5）について計算をしてみる．

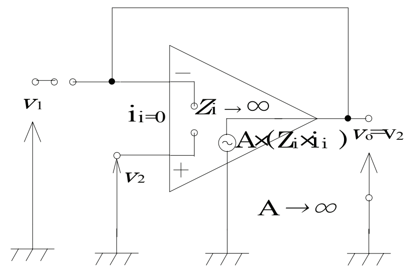


図 4.10.1.4 ボルテージホロワの等価回路

理想的な演算増幅器について，図 4.10.1.1 で増幅回路の動作量を考察する．この考察の中では図 4.10.1.4 を使ってボルテージホロワの計算をする．

入力インピーダンスは (4.10.1.6) である．（4.10.1.6）は（4.10.1.7）が前提になっている．図 4.10.1.4 でも入力インピーダンスは∞にしてある．ただし,逆相入力端子と出力端子間の電圧は零である．正相入力端子の電圧は(4.10.1.9)と仮定する．図 4.10.1.4 では, ボルテージホロワの $v_1$ の入力端子と逆相入力端子とは開放されており，（4.10.1.8）の電圧は出力端子の電圧には無関係となる．

$$\lim_{i_i\to 0} Z_{in} = \lim_{i_i\to 0}\frac{v_i}{i_i} = \infty\cdots(4.10.1.6)$$

$$v_i \neq 0\cdots(4.10.1.7)$$

$$v_1\cdots(4.10.1.8)$$

$$v_2 \neq 0\cdots(4.10.1.9)$$

理想的な演算増幅器の出力インピーダンスは（4.10.1.10）である．（4.10.1.10）は（4.10.1.11）が前提になっている．しかし, 図 4.10.1.4 では正相入力端子の電圧と出力端子の電圧は（4.10.1.12）となる．入力インピーダンスを∞にすることで（4.10.1.13）となる．理想的な演算増幅器の条件と（4.10.1.12）～（4.10.1.13）を使うと（4.10.1.14）になる．（4.10.1.14）では図 4.10.1.4 のオペレーショナルアンプ内部の増幅度に依存する電圧と演算増幅器

の出力端子の電圧が等しいことになる．この（4.10.1.14）から図 4.10.1.4 では出力端子と演算増幅器内部の間に電流が生じないことが分かる．このことは後で,電流利得を使った計算でも算出できる．(4.10.1.14) の計算を算出するには図 4.10.1.4 のオペレーショナルアンプに依存する電圧の計算を使用した．このオペアンプの等価回路については文献 10 を参考にして著者は計算した．一部の電子回路の専門書では異なる回路を掲載しているものがある．正相入力端子の電圧が零の場合は出力端子の電圧は零であることは（4.10.1.12）から明らかである．

$$\lim_{i_o \to \infty} Z_0 = \lim_{i_o \to \infty} \frac{v_o}{-i_o} = 0 \cdots (4.10.1.10)$$

$$v_o \neq 0 \cdots (4.10.1.11)$$

$$v_o = v_2 \cdots (4.10.1.12)$$

$$i_i = 0 \cdots (4.10.1.13)$$

$$\lim_{\substack{A \to \infty \\ Z_i \to \infty}} A \times Z_i \times i_i = v_o \cdots (4.10.1.14)$$

電圧利得は（4.10.1.15）である．ここで（4.10.1.7）と（4.10.1.11）が前提になっている．ボルテージホロワ図 4.10.1.4 の場合は電圧利得が 1 となる．この計算は（4.10.1.12）から（4.10.1.16）になる．

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} \cdots (4.10.1.15)$$

$$\frac{v_2}{v_o} = 1 \cdots (4.10.1.16)$$

電流利得は (410.1.17) である. (4.10.1.18) を前提とする．一般的なボルテージホロワの近似計算では電流利得が有限値である．このことから，電流利得は有限値として計算した．(4.10.1.19) では図 4.10.1.1 の負荷側と増幅器の内部との間に生じる電流は零となる．このことは（4.10.1.14）の計算とも整合性のある結果であると著者は考える．

$$A_i = \frac{i_o}{i_i} \cdots (4.10.1.17)$$

$$A_i = \frac{i_o}{i_i} \neq \infty \cdots (4.10.1.18)$$

$$\lim_{i_i \to 0} i_o = \lim_{i_i \to 0} A_i \times i_i = 0 \cdots (4.10.1.19)$$

電力利得は（4.10.1.20）である．ボルテージホロワの場合の電圧利得は（4.10.1.21）である．（4.10.1.19）を考慮して電力利得を計算すると（4.10.1.20）は（4.10.1.22）のようになる．

$$A_p = \frac{v_o \times i_o}{v_i \times i_i} = A_v \times A_i \cdots (4.10.1.20)$$

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = 1 \cdots (4.10.1.21)$$

$$A_p = \frac{v_o \times i_o}{v_i \times i_i} = 1 \times A_i = A_i \cdots (4.10.1.22)$$

図 4.10.1.5 は演算増幅器にパルスを入力したときの出力電圧の波形である．この出力電圧の最大変化速度をスルーレートと呼ぶ．スルーレートは（4.10.1.23）で記述できる．本論文での理想的な演算増幅器のスルーレートは（4.10.1.24）とする．

$$\mathrm{SR} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \left[ \mathrm{V} / \mu\mathrm{s} \right] \cdots (4.10.1.23)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{SR} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \infty \cdots (4.10.1.24)$$

SR は正弦波出力にも影響を及ぼすことが電子回路論で論じられている．角周波数 $\omega$ の正弦波の無ひずみ最大出力 $V_{max}$ は（4.10.1.25）である．

$$V_{max} \leq \frac{\mathrm{SR}}{\omega} \cdots (4.10.1.25)$$

本論文での理想的な演算増幅器の $V_{max}$ は（4.10.1.26）と仮定する．ただし，(4.10.1.26) のように∞に定義しなくてもよい場合も著者は考える．生体の内圧はひずみ波と考えることができる場合は,周波数が大きくなるほどフーリエ係数が小さ

くなることが考えられる．この係数の大きさから（4.10.1.26）の右辺のように∞で定義する必要はないことも著者は考える．この（4.10.1.26）は本論文での仮定である．

$$\lim_{\omega\to\infty} V_{\max} \le \lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{SR}}{\omega} \equiv \infty \cdots (4.10.1.26)$$

本論文の理想的な演算増幅器では，入力電圧を与えない状態では出力電圧は零である． 4.10.1 の本論文での理想的なボルテージホロワの特性についての考察をここで終了する．

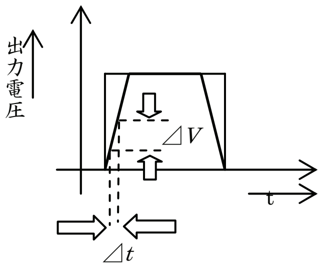


図 4.10.1.5 演算増幅器のパルス出力

電子回路論で挙げられているボルテージホロワの記号は図 4.10.1.6 となる．入力端子は正相入力端子 $v_i$ である．逆相入力端子は出力端子に接続してある．出力端子 $v_o$ には正相入力端子の電圧が生じるものとする．

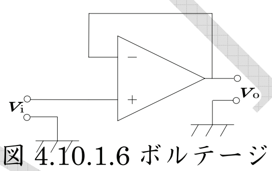


図 4.10.1.6 ボルテージホロワの記号

ここで本論文で論じた理想的なボルテージホロワと対応関係を与える心臓−血管系の演算増幅器の記号を図 4.10.1.7 のようにする．本論文では図 4.10.1.7 の演算増幅器をプレッシャホロワと呼ぶことにする．

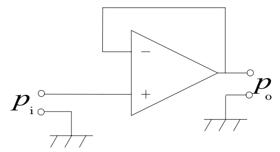


図 4.10.1.7 心臓−血管系の
プレッシャホロワの記号

図 4.10.1.7 の $p$ は内圧である．この内圧は，0 mmHg に対する圧力である．入力側の端子は左側の正相入力端子である．出力側の端子は右側の出力端子である．この演算増幅器は入力した内圧を出力する．図 4.10.1.8 に時変型のコンプライアンスを接続したものを載せてある．図 4.10.1.8 のように接続するとプレッシャホロワの入力となる内圧をコンプライアンスの内圧にできる．この際に，接続したコンプライアンスからプレッシャホロワには血液は流れない．また，プレッシャホロワに内圧を入力しても，正相入力端子からプレッシャホロワの内部回路へ血液は流れない．さらに，プレッシャホロワの正相入力端子に内圧を与えてもプレッシャホロワの出力端子からコンプライアンスへ血液は流れない．

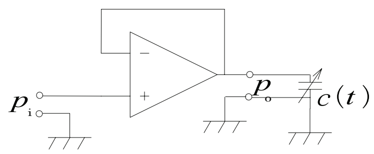


図 4.10.1.8 プレッシャホロワと
コンプライアンスの接続

本論文では，図 2.4 での対応関係から表 4.10.1.1 の対応関係と名前を各利得に与える．(4.10.1.27)～(4.10.1.30) は表 4.10.1.1 の対応関係を与える際に使うプレッシャホロワの特性である．
電子回路のホルテージホロワの特性を上述で定めたときのように（4.10.1.30）は本

論文の仮定である．

$$\mathrm{SR}_{\mathrm{p}} = \frac{\Delta P}{\Delta t}\left[{\mathrm{mmHg}}/{\mu\mathrm{s}}\right]\cdots(4.10.1.27)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{SR}_{\mathrm{p}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta p}{\Delta t} = \infty\cdots(4.10.1.28)$$

$$P_{\max} \le \frac{\mathrm{SR}_{\mathrm{p}}}{\omega}\cdots(4.10.1.29)$$

$$\lim_{\omega\to\infty}P_{\max} \le \lim_{\omega\to\infty}\frac{\mathrm{SR}_{\mathrm{p}}}{\omega} \equiv \infty\cdots(4.10.1.30)$$

表 4.10.1.1 ボルテージホロワとプレッシャホロワの対応表

| | | |
|---|---|---|
| 入力インピーダンス | ⇔ | 入力インピーダンス |
| 出力インピーダンス | ⇔ | 出力インピーダンス |
| 電圧利得 | ⇔ | 内圧利得 |
| 電流利得 | ⇔ | 血流利得 |
| 電力利得 | ⇔ | 工率利得 |
| スルーレート | ⇔ | スルーレート |
| （4.10.1.26） | ⇔ | （4.10.1.30） |

図 2.4 の対応関係を使うと電力に対応する計算を得る．本論文では，この電力に対応する計算を工率と呼ぶことにする．ここで考察する工率は瞬時電力に対応する．プレッシャホロワの工率利得は（4.10.1.22）から血流利得と等しいことがわかる．ただし，血流利得は有限値として扱っている．そして，（4.10.1.19）が成立する．プレッシャホロワの工率は（4.10.1.31）～（4.10.1.34）が成立し，これらの式は理論上では等価である．

$$p_{\mathrm{d}} = i_2(t)\times p_{\mathrm{o}}(t)\cdots(4.10.1.31)$$
$$p_{\mathrm{d}} = i_2(t)\times p_{\mathrm{i}}(t)\cdots(4.10.1.32)$$
$$p_{\mathrm{d}} = A_{\mathrm{i}}\times i_1(t)\times p_{\mathrm{i}}(t)\cdots(4.10.1.33)$$
$$p_{\mathrm{d}} = A_{\mathrm{i}}\times i_1(t)\times p_{\mathrm{o}}(t)\cdots(4.10.1.34)$$

（4.10.1.31）～（4.10.1.34）の極限を計算すると（4.10.1.35）～（4.10.1.38）が成立する．プレッシャホロワを接続したときに，出力側の血流量が極限値では零になる．このことが後ほど提案する物理的モデルから数学的モデル（2.2.4.28）～（2.2.4.45）を導出する際に重要な条件となる．

$$\lim_{i_2\to 0}p_{\mathrm{d}} = \lim_{i_2\to 0}\left(i_2(t)\times p_{\mathrm{o}}(t)\right) = 0\cdots(4.10.1.35)$$

$$\lim_{i_2\to 0}p_{\mathrm{d}} = \lim_{i_2\to 0}\left(i_2(t)\times p_{\mathrm{i}}(t)\right) = 0\cdots(4.10.1.36)$$

$$\lim_{i_1\to 0}p_{\mathrm{d}} =$$
$$\lim_{i_1\to 0}\left(A_{\mathrm{i}}\times i_1(t)\times p_{\mathrm{i}}(t)\right) = 0\cdots(4.10.1.37)$$

$$\lim_{i_1\to 0}p_{\mathrm{d}} =$$
$$\lim_{i_1\to 0}\left(A_{\mathrm{i}}\times i_1(t)\times p_{\mathrm{o}}(t)\right) = 0\cdots(4.10.1.38)$$

上述では図 2.4 の対応関係で工率を計算した．工率は（4.10.1.39）で計算できる．（4.10.1.39）の右辺は仕事の時間に対する変化率である．（4.10.1.40）は仕事の力学的計算である．（4.10.1.40）の右辺の力は（4.10.1.41）の左辺で与えることにする．（4.10.1.41）の右辺は内圧と，その内圧を定義する断面積である．（4.10.1.41）の右辺を（4.10.1.40）に代入すると（4.10.1.42）になる．血液量は（4.10.1.43）で計算できるものとする．（4.10.1.43）は容積の断面積 $S$ と長さ $x$ である．長さは断面積とは垂直関係にあるものとする．（4.10.1.43）から（4.10.1.44）が成立するものとする．（4.10.1.44）を（4.10.1.42）に代入すると（4.10.1.45）になる．（2.2.2.2）と（4.10.1.45）から（4.10.1.46）が導出できる．（4.10.1.39）と（4.10.1.46）から（4.10.1.47）が記述できる．（4.10.1.39）と（4.10.1.47）から（4.10.1.48）が記述できる．

$$p_{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\cdots(4.10.1.39)$$
$$\mathrm{d}w = f\times\mathrm{d}x\cdots(4.10.1.40)$$
$$f = p\times S\cdots(4.10.1.41)$$
$$\mathrm{d}w = p\times S\times\mathrm{d}x\cdots(4.10.1.42)$$
$$q = S\times x\cdots(4.10.1.43)$$

$$\mathrm{d}q = S \times \mathrm{d}x \cdots (4.10.1.44)$$
$$\mathrm{d}w = p \times \mathrm{d}q \cdots (4.10.1.45)$$
$$\mathrm{d}w = p \times i \times \mathrm{d}t \cdots (4.10.1.46)$$
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = p \times i \cdots (4.10.1.47)$$
$$p_{\mathrm{d}} = p \times i \cdots (4.10.1.48)$$

**4.10.2 電圧制御電圧源とコンプライアンス**

4.10.2 では電圧制御電圧源に対応する循環系の回路モデルについて考察する．この電圧制御電圧源[11]を循環系の回路モデル図 2.1 に導入することで，(2.2.4.28) ～ (2.2.4.45) が導出できるようになる．さらに，図 2.1 を発展させた物理的モデル——図 4.10.2.4——に接続することで (a.3.1) ～ (a.3.52) を導出できるようになる．(2.2.4.28) ～ (2.2.4.45) あるいは (a.3.1) ～ (a.3.52) の強制項あるいは自由項を，電圧制御電圧源と対応するその循環系のモデルで説明できるようになる．

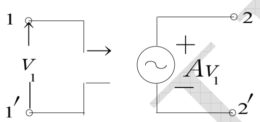


図 4.10.2.1 電圧制御電圧源の記号

図 4.10.2.1 は電圧制御電圧源の記号である．図 4.10.2.1 の電源は 1−1′ 端子に与えた電圧で 2−2′ 端子の出力を制御する．1−1′ 端子入力側に電流が生じないで，入力インピーダンスは∞である．

図 4.10.2.1 の電圧制御電圧源に対応する循環系の回路モデルとして，図 4.10.1.8 のモデルを著者は提案する．図 2.4 では，図 4.10.1.8 の入力側のインピーダンスは∞で入力側に血液が流れないことも図 4.10.2.1 の電圧源と同じである．また，図 4.10.1.8 の出力側の内圧を入力側の内圧で制御できることも図 4.10.2.1 の電圧制御電圧源と同じである．

図 4.10.1.8 の回路は線形回路となる．図 4.10.1.8 の正相入力端子の電圧が出力端子に接続しているコンプライアンスの内圧となる．このために，図 4.10.1.8 では，(2.2.1.1) の左辺のコンプライアンスの関数と右辺の内圧の関数を表示することができる．(2.2.1.1) の関係から (2.2.1.1) の二つの関数が決定すれば (2.2.1.1) の残りの一つの関数は決定することは明らかである．図 4.10.1.8 ではコンプライアンスと内圧が決定していることから (2.2.1.1) の血液量が決定することになる．このために，(4.8.1) ～ (4.8.6) の線形素子として計算した場合の数学的記述を満足する．しかし，図 4.10.1.8 では回路となっているので，線形回路として (4.8.1) ～ (4.8.6) の計算を満足する．

図 4.10.2.2 では図 4.10.1.8 を線形システムとして考察した場合の図である．図 4.10.2.2 では内圧を入力して，出力である血液量を得ている．コンプライアンスに内圧を入力する回路として図 4.10.1.7 のプレッシャホロワを使用している．出力の血液量は (2.2.1.1) の右辺の血液量である．

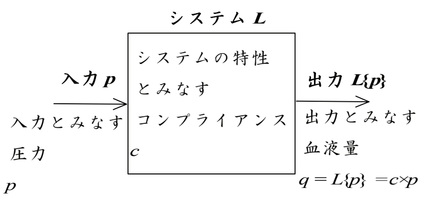


図 4.10.2.2 コンプライアンスをもつシステム

(2.2.4.24) ～ (2.2.4.27) を物理的モデルでどのように表現するかを考察する．(2.2.4.24) ～ (2.2.4.27) は (2.2.4.22) と (2.2.4.23) を使って導出している．(2.2.4.22) と (2.2.4.23) を保証するためには図 2.1 の心室のコンプライアンスに (2.2.4.22) と (2.2.4.23) の左辺の内圧を与える必要がある．図 2.1 ではコンプライアンスの関数は決定しているが内圧と血

液量は決定していない．図 2.1 の心室の特定の内圧を決定するために，図 4.10.1.8 のようにプレッシャホロワをその心室のコンプライアンスに接続する．このことで，図 2.1 の心室部には特定のコンプライアンスの関数と特定の内圧の関数を与えることができる．（2.2.4.22）と（2.2.4.23）が成立することを物理的モデルの記号で表示できる．図 4.10.2.3 は実際に図 2.1 の心室部のコンプライアンスにプレッシャホロワを接続したものである．

図 4.10.2.3 の心室部には 4.10.1 で考察した電圧制御電圧源に対応する回路が接続してある．図 4.10.2.3 を考察すると心室の内圧が電子回路の電源の電圧に対応することになる．図 2.1 と図 4.10.2.3 の回路モデルから導出した微分方程式系の数値解析の結果は大きく異なるものであった．図 2.1 から導出したものは（2.2.4.2）～（2.2.4.19）であり，行列で記述すると（2.2.4.20）の斉次方程式になる．図 4.10.2.3 から導出した微分方程式系は（2.2.4.28）～（2.2.4.45）であり，行列で記述すると (4.9.5) の非斉次方程式になる．図 2.1 の場合と比較して図 4.10.2.3 の数値解析の左心室の結果では測定値と一致する値の個数が著しく増加し，波形も測定値のものに著しく近づいた．しかし，（2.2.4.28）～（2.2.4.45）の内圧の関数を記述する項の選択方法を図 4.10.2.3 には表示していない．

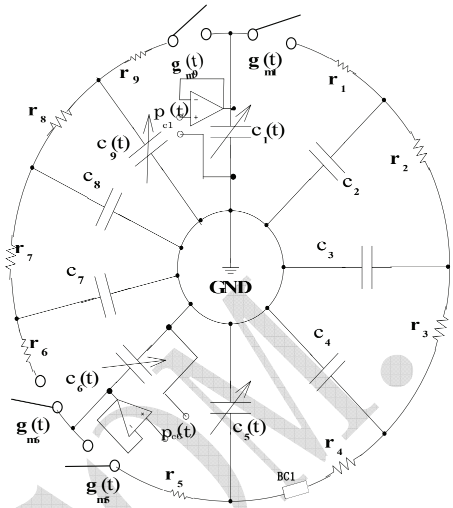


図 4.10.2.3 プレッシャホロワを接続した図 2.1 の循環系の回路モデル

図 4.10.2.4 の循環系の回路モデルについて考察する．図 4.10.2.3 のコンプライアンスと流れの抵抗の個数を n 個に拡張する．n 個のすべてのコンプライアンスを（2.2.1.1）に替える．その各コンプライアンスに図 4.10.1.7 のプレッシャホロワを図 4.10.1.8 のように接続する．この操作で図 4.10.2.4 を得る．ただし，各プレッシャホロワの正相入力端子の入力となる内圧の関係は現在未解決の課題である．図 4.10.2.4 から付録 3 の（a.3.1）～（a.3.52）を導出できる．これらの微分方程式の導出方法は（2.2.4.28）～（2.2.4.45）と同様である．しかし，各微分方程式に内圧の関数を記述する項の選択方法までは図 4.10.2.4 では明示していない．図 4.10.2.4 から（a.3.1）～（a.3.52）以外の微分方程式系を導出することも可能である．(4.9.27) と（4.9.28）が成立していることを前提にして，等価と成る微分方程式系を幾つか考えることができる．これらの微分方程式系の異なる部分は自由項あるいは強制項と呼ばれる項である．

ここで，本論文の議論の便宜のために，図 4.10.1.8 の回路に名前を付ける．図 2.4 の対応関係を使って内圧制御内圧源と呼ぶことにする．図 4.10.2.4 の各血流路には内圧制御内圧源がある．この内圧制御内圧源で血液を蓄積し，その血液量を制御できるが，そのコンプライアンスの内圧での血液量の制御である．内圧制御内圧源はその正相入力端子の入力でコンプライアンスの内圧を制御する回路であり，血液量をその入力で決定することはできない．その血液量は（2.2.1.1）からそのコンプライアンスと入力端子の入力で決定する．さらに，このような考察は，図 4.10.2.4 を今後の著者の研究対象とする．

電気回路論の理想電流源では、両端子間の電圧とは無関係に定まった電流が生じる．この電流源に図 2.4 の対応関係を使うと両端子間の内圧差に無関係に定まった血流量を生じることになる．本論文の議論の便宜のために，この電流源に対応するモデルを理想血流源と呼ぶ．

しかし，慣性の法則・運動の第二法則・作用反作用の法則を満足しない場合があることを，物理学では次のように考察できる．ハーゲン・ポアズイユの法則（4.3.21）では右辺の分子に内圧差が記述してある．この内圧差の値が変化する場合には他の右辺のパラメータに依存した結果として左辺の血流量が決定する．(4.3.37) の右辺の分子には内圧・断面積・体積密度・加速度の時間に対する変化率が記述してある．さらに，（4.3.37）の分母の加速度には（4.3.36）が成立している．運動の第二法則からも明らかで，力と慣性質量から物体の移動を加速度で考えることができる．血流量は血液の移動によって生じる現象である．血液の移動は血液を構成している物体の移動で説明できる．この物体の運動は慣性の法則による等速度運動あるいは運動の第二法則での力と慣性質量による加速度で説明できる．運動の第三法則の作用反作用の法則では互に物体に力を及ぼし返す．これらの運動の法則から（4.3.37）でも内圧差に無関係に血流量が生じていることは否定できる．上述の（4.3.37）の右辺の各パラメータは（4.3.37）の左辺の血流量を決定する．(4.3.37) のこれらのパラメータは両端子間の内圧差に無関係に決定することは否定できる．

ここまでの（4.3.37）の議論は質点系の（4.2.2.24) にも同様に成立する．しかし，質点系での流体の議論には幾つかの条件が成立する場合に正しいものと扱うことにするが，ここでの議論では論じない．これらの上述の血流源の議論では理想電流源に対応する理想血流源は適していないものと著者は考える．

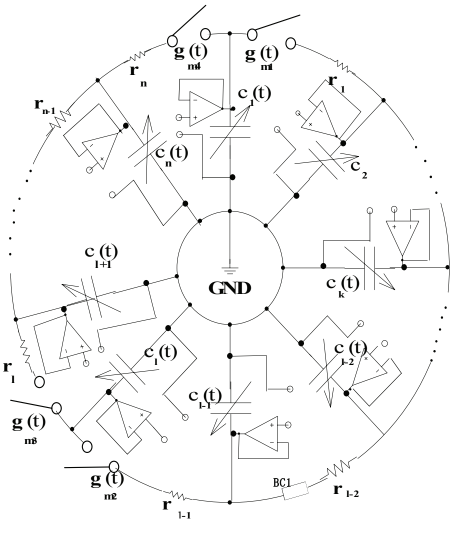


図 4.10.2.4　図 4.10.2.3 の循環系の回路モデルを発展させた物理的モデル

## 5　あとがき

本論文は，1996 年頃～2006 年までの循環系の回路モデルの著者の研究成果の一部を纏めたものである．著者が定義した物理的モデルや数学的モ

デルが本論文の成果の一部となる．著者が与えたこれらの定義は，一般に 2006 年現在に於ける他の工学書や医学書で扱われているものとは異なるものである．しかし，本論文で扱った成果は，生理学・物理学・数学での事実として扱われる指導内容と一致するものと著者が考えるところも多くある．この比較に対して 2006 年現在に成書で指導している他の著者の指導内容は上述のような学術指導と一致しないものが多いものと著者は考える．電気・電子・情報・通信・生体工学での研究の中で,このような著者の見解は得たものである．以下に著者の本論文のまとめを簡単に挙げてみる．

2.1 の図 2.1 の物理的モデルでは BC1 で整流素子あるいは波形操作回路として静脈弁に対応するモデルを提案した．この BC1 は新規性のあるモデルであるものと著者は考えている．一般の循環系の回路モデルの指導では静脈弁はダイオードに対応を与えられる．しかし，実際には電子回路のダイオードのように逆方向の流れをすべて止める機能は静脈弁にはないものと,著者は考える．また，図 2.1 の静脈弁の位置ですべての動脈への逆方向の血流を完全に止めるものではないことを著者は考えた．また，毛細血管への逆方向の血流を完全に止めるものでもないことも同様である．このために，整流や波形操作をモデリングする際に，この生体内での現象にダイオードよりも近いものを設計することを考えた．しかし，本論文では本格的にこの静脈弁のモデリングに取り組んではいない．循環系の連立微分方程式群を導出するための簡単な規則として扱った．

2.2.1～2.2.3 では図 2.1 の回路要素を定義した．ここでのコンプライアンスと流れの抵抗は著者自身による独自の定義である．そして，図 2.1 の記号に電気・電子工学の回路との対応を考えた 2.2.4 の図 2.4 を導入した．図 2.4 の回路要素の定義は数学や物理量の単位との対応関係が自然であるものと著者は考えている．さらに，2.2.4 では線形微分方程式が導出できた．この線形微分方程式——斉次方程式——の解は重ね合わせの原理を満足する．しかし，この斉次方程式よりもさらにヒトの心室の測定結果の容積と内圧に近い線形微分方程式——非斉次方程式——を導出した．３章のこの非斉次方程式の数値解析の計算結果では左心室の測定値と完全に一致した．この結果は著者が知る上では成書にも見たことがないものである．しかし，３章の計算で使用したフーリエ解析による三角多項式の項数は計算環境の規制のために所有するデータを十分に活かしているものではない．この三角多項式の項数を著しく増やしたものでの数値解析の計算を，今後の著者の検討事項として挙げる．また，右心室・左心房・右心房・上行大動脈の測定値の内圧と容積を追加した数値解析の計算も著者の検討事項である．

4.1.3 の総血液量の考察では項数を∞にまで拡張した．しかし，実際には有限個の項数で使用することになるものと著者は考える．この際に，幾つの項数で使用するのが最適であるかは課題である．

4.2.1 では運動方程式から図 2.1 の回路要素と類似のコンプライアンスを導出した．また，生理学で紹介しているコンプライアンスから $\varepsilon$ −近傍で成立する媒介変数表示の第一階の導関数のコンプライアンスを導出している．この生理学のコンプライアンスから導出した $\varepsilon$ −近傍でのコンプライアンスは分母を零に取らないところで定義域とした．この定義域については，循環系の回路モデルでは無視されていることが多いものと著者は考える．このために，本論文でこの定義域を明示することが,数学理論に従った正しい扱いを示すこと,を著者は期待した．定義域外でのコンプライアンスの計算が成書においても氾濫しているかの印象を——2006 年現在——著者はもつ．

4.2.2 では質点系のコンプライアンスを考察した．この質点系の扱いが実際の測定を行う技術に向かうものと著者は考えている．著者は 4.2.2 の考察よりも厳密な考察を行う予定である．

4.2.3 では D'Alembert の原理で運動方程式から導出した (4.2.1.14) と運動方程式とは関係なく定

義した（4.2.1.21）を統一して扱うための基礎を考察した．釣り合いの状態にある物体のコンプライアンスの計算には（4.2.1.14）では分母の加速度が零のために，（4.2.1.21）のような定義が必要になる．これらを，D'Alembert の原理で統一的に扱ってみた．この考察は試みとしての性質が強いものである．今後，本論文のコンプライアンスを汎用させる際にはより研究を進めるつもりである．

4.3 ではコンプライアンスから計算できる血流量について考察した．この血流量の計算で数学や物理学と一致しないものについて論じた．特に物理理論での電磁気学の回路方程式の導出と流体力学でのベルヌーイの定理およびハーゲン・ポアズイユの法則に一致しない部分を挙げた．これらのことも，循環系の回路モデルの設計の際には無視されていることが多いものと——2006 年現在——著者は印象をもつ．4.3 のこれらの考察で正しい物理理論での循環系のモデルに対する理解を広めることを著者は期待した．4.3 のこの考察の一部は 4.2.1 での生理学のコンプライアンスから導出した ε－近傍でのコンプライアンスの定義域と関係をもつことは明らかである．

4.4 では体積と応力の三角多項式による近似式から，コンプライアンスと接線との関係を考察した．ここでの議論は既知の指導の体積と内圧の関係からコンプライアンスを考える際に著者は使用した．

4.5 では（4.5.10）で掛け算作用素として線形作用素になることを示した．（4.5.16）では線形作用素にならないことを示した．特に線形作用素になることは，線形システムになる場合に強力な特性となる．非線形性で心臓や血管を論じることがある場合に対して，線形性を作用素として数学的に証明したところに新規性があるものと著者は考える．

4.6 では心臓と血管を本論文のコンプライアンスと流れの抵抗で評価する際の工学技術について考察した．4.6 では心臓と血管を近似モデルとしての数学的モデルで考察した．ここで，重根を持つ際の数学的関係（4.6.6）を考察した．このことで，一般的には（4.6.6）の極限値の場合は応力と容積が極値をとらないことを示した．この関係は心臓や血管の特性の分析に使うことを著者は考えている．そして，容積と応力の定数倍の関数でのコンプライアンスの変動を考察した．このコプライアンスの変動は容積・応力・力・加速度・質量の変動をも含めた関係を与える．これらの関係付けられた物理量は心臓や血管をシステムとして解析する際に強力なファターとなることは物理理論から考察できる．

4.7 では電気回路要素との対応関係となる図 2.4 について考察した．図 2.4 の対応関係は図 2.1 の回路方程式の導出の際にキルヒホッフの法則を導入することができる強力な基礎を与えるものである．このことは本論文の回路要素の数学的モデルとともに循環系の回路モデルに新規性のある提案になるものと著者は考える．しかし，成書で指導しているものも図 2.4 に類似の対応関係を与えていることは事実である．本論文の対応関係図 2.4 と著しく異なる箇所は，次の圧縮力の扱いである．本論文では内圧——0[mmHg]に対する圧縮力——と電位を対応させた．しかし，成書では内圧——大気圧に対する圧縮力——と電圧を対応させていることである．そして，図 2.4 の解釈には図 2.1 の回路要素の数学的モデルを使用することである．

4.8 では——循環系の回路モデルに——本論文の理論で導入することを成功したキルヒホッフの法則について考察した．ここで，電気回路要素としては，コンプライアンス（2.2.1.1）が線形素子に対応することを示した．このことで，BC1 が電気・電子工学での線形性を示せば図 2.1 は線形回路網になる．そして本論文の数学的処理では線形回路網として扱える場合を考察した．また，この線形回路網から導出した線形微分方程式の一つが斉次方程式であるので解に重ね合わせの原理が成立することを論じた．そして，3 章で使った微分方程式が非斉次方程式であり，斉次方程式とのある解の関係をもつことを示した．この関係

（4.8.16）は非斉次方程式の解を考察する上で便利であり，また心臓–血管系の容積特性を知る上で今後の著者の研究課題となることを考えている．4.8 の最後にキルヒホッフの第一法則――電流連続の法則――とキルヒホッフの第二法則――電圧平衡の法則――を使って（2.2.4.2）～（2.2.4.19）を考察した．これらの微分方程式に KCL と KVL が現れていることを論じた．このこともキルヒホッフの法則の導入で得た恩恵となる．ヒトの簡単な循環の微分方程式がＫＣＬとＫＶＬを使って図 2.1 のような回路モデルから記述できることが分かった．

4.9 では 3 章のシミュレーションに使った微分方程式群について考察した．さらに，その微分方程式群を発展させた微分方程式群の記述を試みた．4.9 では 3 章のような左心室の容積と内圧の特性をもつ微分方程式群が線形時変システムに記述できることが分かった．さらに，その解が安定であり、構造安定であるものと考察できた．しかし，4.9 での方程式の構造安定性の考察は相図の全体構造から考察したものではない．線形微分方程式系の解の特性から，その構造安定性を考察した．このことで，3 章のような特性を他の血流路にも示すことが期待できる線形時変システムが解が安定で構造安定な線形微分方程式であることが期待できる．そして，その線形時変システムの行列を替えていく．このことで，現在よりも多くの心臓–血管系の血液循環を線形時変システムとして追跡できることを期待できる．（4.9.166）は今後の著者の研究課題になることは明らかである．

4.10 では 4.9 で記述した線形時変システムと物理的モデルの対応関係を与える試みをした．その際には，電子回路論の電圧制御電圧源に対応する内圧制御内圧源を与えた．この内圧制御内圧源はボルテージホロワに対応させたプレッシャホロワの導入で可能になった．このプレッシャホロワと時変型のコンプライアンスを図 4.10.1.8 のように接続して線形回路をつくり，この線形回路図 4.10.1.8 を内圧制御内圧源とした．この内圧制御内圧源を接続した物理的モデルが図 4.10.2.3 と図 4.10.2.4 である．図 4.10.2.4 が（4.9.24）に対応する循環系の回路モデルとして論じた．ただし，回路方程式の導出方法は（2.2.4.28）～（2.2.4.45）と同様である．この場合はすべてのコンプライアンスが時変型であり，（a.3.1）～（a.3.52）のようにすることを仮定した．図 4.10.2.4 が線形時変システムに記述でき，具体的にその係数行列と強制項の成分まで明らかにできた．しかし，各内圧の関数をどのようにそれぞれ関係付けるかは今後の検討事項である．また，内圧制御内圧源の入力を制御することは，神経系からの心臓–血管系の制御に関係があるものと著者は考える[12)]．神経系との連絡を持つ心臓–血管系および（4.9.166）の数学的記述から次のように著者は考える．学習による（4.9.166）のパラメータと制御入力については著者の今後の検討事項となる．

**参考文献**

1） 富岡和人，“循環系の時変型集中定数回路モデル“，信学技報，MBE99-96，(1999-10)
2） 富岡和人，“循環系の時変型集中定数回路モデル――神経系のモデルと循環系のモデルの連絡に関する研究――“，信学技報，MBE2000-22，(2000-05)
3） 俣野博：『岩波講座･応用数学[基礎 4]微分方程式Ｉ』，(岩波書店，1993)，p.46
4） 富岡和人，“循環系の時変型集中定数回路モデル――心臓弁のモデルに関する研究――“，信学技報，MBE99-117，(1999-12)
5） 富岡和人，“循環系の集中定数回路モデル――コンプライアンスについての研究１――“，信学技報，MBE2000-74，(2000-10)
6） 藤田宏：『岩波講座・応用数学[基礎 5]関数解析』，(岩波書店，1995)，pp.89-102
7） 大槻義彦著：『改訂版物理学Ⅱ』，(学術図書出版社，1990)，p.43
8） 電気学会大学講座編：『電気回路論』，(電気学会，1993)，p.4
9） 有本卓：『講座･応用数学[対象 10]システム

と制御の数理』,（岩波書店，1993），pp.7-10
１０）　苅屋公明，前田親良：『計測の科学と工学』，（産業図書，1996），pp.103-105
１１）　電気学会編，『コンパクト版電気工学ポケットブック』，（オーム社，1990），p.196
１２）　富岡和人,“神経系を制御する技術に関する研究――脳波の発生と神経系の情報処理についての簡単な考察――”，信学技報,MBE2000-75，(2000-10)

## 付録１　Lebesgue 積分での体積について

次のようにｎ次元の Eulid 空間を考える．ｎ個の実数の組み合わせで，点ｘを（a.1.1）のように記述する．

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdots \text{(a.1.1)}$$

点ｘの全体はｎ次元空間を成す．ｎ次元空間の二点ｘ，ｙの距離を（a.1.2）で定義する．

$$\rho(x, y) = \left\{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \cdots \text{(a.1.2)}$$

この距離（a.1.2）が定義されたｎ次元空間をｎ次元の Eulid 空間と呼ぶことにする．

（a.1.3）で点ｘの集合を定義する．この集合を（閉）区間と呼ぶことにする．

$$s_i \le x_i \le f_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \cdots \text{(a.1.3)}$$

（a.1.3）で等号を取らないならば開区間であり，右あるいは左の等号だけを取らないならば，片開きの区間と呼ぶ．（a.1.4）の場合では右の開いた区間と呼ぶ．（a.1.5）の場合では左の開いた区間と呼ぶ．

$$s_i \le x_i < f_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \cdots \text{(a.1.4)}$$

$$s_i < x_i \le f_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \cdots \text{(a.1.5)}$$

この区間は一次元空間の拡張として見ることができる．二次元の矩形・三次元の直方体の辺あるいは稜が，座標軸に平行になるものとする．

区間（a.1.3）での，区間の体積を（a.1.6）で与える．ここでは区間の開閉を無視することにする．

$$\prod_{i=1}^{n} (f_i - s_i) \cdots \text{(a.1.6)}$$

（a.1.3）の意味を拡張する．点ｘの $s_i$ または $f_i$ のうち若干が－∞または＋∞ならば，その体積は＋∞とする．しかし，若干のｉに関して $s_i = f_i$ の場合は，他の $s_i$ または $f_i$ の中に±∞があっても，その体積を０とする．

有限個の区間の合併集合を，区間塊と呼ぶことにする．区間塊の体積は弱い意味で加法的である．$\omega_i$（ｉ＝1，2，･･･，ｎ）は互いに重なり合わない区間塊とする．$\omega_i$ を合併して生じる区間塊を $\omega$ とする．$\omega_i$ と $\omega$ の体積を $m\omega_i$ と $m\omega$ とするとき（a.1.7）が成り立つ．

$$m\omega = \sum_{i=1}^{n} m\omega_i \cdots \text{(a.1.7)}$$

（a.1.7）は直感的に明らかであると著者は考える．（a.1.8）は数学の解析論において証明が与えられている．（a.1.8）は本論文では，特に重要であると著者は考える．血液量を区間での体積で考える際に，（a.1.8）を使って（a.1.9）での血液量の記述が可能であるとする．（a.1.9）での $q$ は血液量であり，$q_i$ は互いに重なり合わない区間内の血液量であるとする．

$$m\omega = \sum_{i=1}^{\infty} m\omega_i \cdots \text{(a.1.8)}$$

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \cdots \text{(a.1.9)}$$

## 付録２　線形微分方程式系（4.9.5）の行列

$$\boldsymbol{q}(t)=\begin{pmatrix} q_{c1}(t)\\ q_{c2}(t)\\ q_{c3}(t)\\ q_{c4}(t)\\ q_{c5}(t)\\ q_{c6}(t)\\ q_{c7}(t)\\ q_{c8}(t)\\ q_{c9}(t) \end{pmatrix}\cdots(\text{a}.2.1)\quad \boldsymbol{u}(t)=\begin{pmatrix} p_1(t)\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ p_6(t)\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\cdots(\text{a}.2.2)$$

$$\boldsymbol{B}(t)=\begin{pmatrix}
-\frac{1}{r_1\times c_1(t)} & \frac{1}{r_1\times c_2} & 0 & \cdots & & & & & \\
0 & -\frac{1}{r_1\times c_2}-\frac{1}{r_2\times c_2} & \frac{1}{r_2\times c_3} & 0 & \cdots & & & & \\
0 & \frac{1}{r_2\times c_2} & -\frac{1}{r_2\times c_3}-\frac{1}{r_3\times c_3} & \frac{1}{r_3\times c_4} & 0 & \cdots & & & \\
0 & 0 & \frac{1}{r_3\times c_3} & -\frac{1}{r_3\times c_4}-\frac{1}{r_4\times c_4} & \frac{1}{r_4\times c_5(t)} & 0 & \cdots & & \\
 & \cdots & 0 & \frac{1}{r_4\times c_4} & -\frac{1}{r_4\times c_5(t)} & 0 & \cdots & & \\
 & & & \cdots & 0 & -\frac{1}{r_6\times c_6(t)} & \frac{1}{r_6\times c_7} & 0 & 0 \\
 & & & & \cdots & 0 & -\frac{1}{r_6\times c_7}-\frac{1}{r_7\times c_7} & \frac{1}{r_7\times c_8} & 0 \\
 & & & & \cdots & 0 & \frac{1}{r_7\times c_7} & -\frac{1}{r_7\times c_8}-\frac{1}{r_8\times c_8} & \frac{1}{r_8\times c_9(t)} \\
 & & & & & \cdots & 0 & \frac{1}{r_8\times c_8} & -\frac{1}{r_8\times c_9(t)}
\end{pmatrix}\cdots(\text{a}.2.3)$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & & & & & & & \\
\frac{1}{r_1} & 0 & \cdots & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & &
\end{pmatrix}\cdots(\text{a}.2.4)$$

$$
\boldsymbol{B}(t)=\begin{pmatrix}
-\frac{1}{r_9\times c_1(t)} & 0 & \cdots & & & & & & \frac{1}{r_9\times c_9(t)} \\
0 & -\frac{1}{r_2\times c_2} & \frac{1}{r_2\times c_3} & 0 & \cdots & & & & \\
0 & \frac{1}{r_2\times c_2} & -\frac{1}{r_2\times c_3}-\frac{1}{r_3\times c_3} & \frac{1}{r_3\times c_4} & 0 & \cdots & & & \\
0 & 0 & \frac{1}{r_3\times c_3} & -\frac{1}{r_3\times c_4}-\frac{1}{r_4\times c_4} & \frac{1}{r_4\times c_5(t)} & 0 & \cdots & & \\
\cdots & 0 & & \frac{1}{r_4\times c_4} & -\frac{1}{r_4\times c_5(t)}-\frac{1}{r_5\times c_5(t)} & 0 & \cdots & & \\
& \cdots & 0 & & \frac{1}{r_5\times c_5(t)} & -\frac{1}{r_5\times c_6(t)} & 0 & \cdots & \\
& & & \cdots & 0 & & -\frac{1}{r_7\times c_7} & \frac{1}{r_7\times c_8} & 0 \\
& & & \cdots & 0 & & \frac{1}{r_7\times c_7} & -\frac{1}{r_7\times c_8}-\frac{1}{r_8\times c_8} & \frac{1}{r_8\times c_9(t)} \\
& & & & \cdots & 0 & & \frac{1}{r_8\times c_8} & -\frac{1}{r_8\times c_9(t)}-\frac{1}{r_9\times c_9(t)}
\end{pmatrix}\cdots(\mathrm{a}.2.5)
$$

$$
\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r_5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & & \\
\frac{1}{r_9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}\cdots(\mathrm{a}.2.6)
$$

## 付録３　線形時変システム（4.9.24）の連立微分方程式

収縮期：(a.3.1）～（a.3.13）は収縮期の連立微分方程式である．

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_1(t)}{r_1\times c_1(t)}+\frac{q_2(t)}{r_1\times c_2(t)}\right)\cdots\text{(a.3.1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_1(t)}{r_1}-\frac{q_2(t)}{r_1\times c_2(t)}\right)+\left(-\frac{q_2(t)}{r_2\times c_2(t)}+\frac{q_3(t)}{r_2\times c_3(t)}\right)\cdots\text{(a.3.2)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_3(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_2(t)}{r_2}-\frac{q_3(t)}{r_2\times c_3(t)}\right)+\left(-\frac{q_3(t)}{r_3\times c_3(t)}+\frac{q_4(t)}{r_3\times c_4(t)}\right)\cdots\text{(a.3.3)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_k(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{k-1}(t)}{r_{k-1}}-\frac{q_k(t)}{r_{k-1}\times c_k(t)}\right)+\left(-\frac{q_k(t)}{r_k\times c_k(t)}+\frac{q_{k+1}(t)}{r_k\times c_{k+1}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.4)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{k+1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_k(t)}{r_k}-\frac{q_{k+1}(t)}{r_k\times c_{k+1}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{k+1}(t)}{r_{k+1}\times c_{k+1}(t)}+\frac{q_{k+2}(t)}{r_{k+1}\times c_{k+2}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.5)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_l(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{l-1}(t)}{r_{l-1}}-\frac{q_l(t)}{r_{l-1}\times c_l(t)}\right)+\left(-\frac{q_l(t)}{r_l\times c_l(t)}+\frac{q_{l+1}(t)}{r_l\times c_{l+1}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.6)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_l(t)}{r_l}-\frac{q_{l+1}(t)}{r_l\times c_{l+1}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.7)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+2}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_{l+2}(t)}{r_{l+2}\times c_{l+2}(t)}+\frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+2}\times c_{l+3}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.8)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+3}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{l+2}(t)}{r_{l+2}}-\frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+2}\times c_{l+3}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+3}\times c_{l+3}(t)}+\frac{q_{l+4}(t)}{r_{l+3}\times c_{l+4}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.9)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_m(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{m-1}(t)}{r_{m-1}}-\frac{q_m(t)}{r_{m-1}\times c_m(t)}\right)+\left(-\frac{q_m(t)}{r_m\times c_m(t)}+\frac{q_{m+1}(t)}{r_m\times c_{m+1}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.10)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{m+1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_m(t)}{r_m}-\frac{q_{m+1}(t)}{r_m\times c_{m+1}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{m+1}(t)}{r_{m+1}\times c_{m+1}(t)}+\frac{q_{m+2}(t)}{r_{m+1}\times c_{m+2}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.11)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{n-1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{n-2}(t)}{r_{n-2}}-\frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-2}\times c_{n-1}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-1}\times c_{n-1}(t)}+\frac{q_n(t)}{r_{n-1}\times c_n(t)}\right)\cdots\text{(a.3.12)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_n(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{n-1}(t)}{r_{n-1}}-\frac{q_n(t)}{r_{n-1}\times c_n(t)}\right)\cdots\text{(a.3.13)}$$

拡張期：(a.3.14) ～ (a.3.26) は拡張期の連立微分方程式である．

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_n(t)}{r_n}-\frac{q_1(t)}{r_n\times c_1(t)}\right)\cdots\text{(a.3.14)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_2(t)}{r_2\times c_2(t)}+\frac{q_3(t)}{r_2\times c_3(t)}\right)\cdots\text{(a.3.15)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_3(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_2(t)}{r_2}-\frac{q_3(t)}{r_2\times c_3(t)}\right)+\left(-\frac{q_3(t)}{r_3\times c_3(t)}+\frac{q_4(t)}{r_3\times c_4(t)}\right)\cdots\text{(a.3.16)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_k(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{k-1}(t)}{r_{k-1}}-\frac{q_k(t)}{r_{k-1}\times c_k(t)}\right)+\left(-\frac{q_k(t)}{r_k\times c_k(t)}+\frac{q_{k+1}(t)}{r_k\times c_{k+1}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.17)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{k+1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_k(t)}{r_k}-\frac{q_{k+1}(t)}{r_k\times c_{k+1}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{k+1}(t)}{r_{k+1}\times c_{k+1}(t)}+\frac{q_{k+2}(t)}{r_{k+1}\times c_{k+2}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.18)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_l(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{l-1}(t)}{r_{l-1}}-\frac{q_l(t)}{r_{l-1}\times c_l(t)}\right)+\left(-\frac{q_l(t)}{r_l\times c_l(t)}+\frac{p_{l+1}(t)}{r_l}\right)\cdots\text{(a.3.19)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_l(t)}{r_l}-\frac{q_{l+1}(t)}{r_l\times c_{l+1}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.20)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+2}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_{l+2}(t)}{r_{l+2}\times c_{l+2}(t)}+\frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+2}\times c_{l+3}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.21)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+3}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{l+2}(t)}{r_{l+2}}-\frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+2}\times c_{l+3}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+3}\times c_{l+3}(t)}+\frac{q_{l+4}(t)}{r_{l+3}\times c_{l+4}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.22)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_m(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{m-1}(t)}{r_{m-1}}-\frac{q_m(t)}{r_{m-1}\times c_m(t)}\right)+\left(-\frac{q_m(t)}{r_m\times c_m(t)}+\frac{q_{m+1}(t)}{r_m\times c_{m+1}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.23)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{m+1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_m(t)}{r_m}-\frac{q_{m+1}(t)}{r_m\times c_{m+1}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{m+1}(t)}{r_{m+1}\times c_{m+1}(t)}+\frac{q_{m+2}(t)}{r_{m+1}\times c_{m+2}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.24)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{n-1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{n-2}(t)}{r_{n-2}}-\frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-2}\times c_{n-1}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-1}\times c_{n-1}(t)}+\frac{q_n(t)}{r_{n-1}\times c_n(t)}\right)\cdots\text{(a.3.25)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_n(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{n-1}(t)}{r_{n-1}}-\frac{q_n(t)}{r_{n-1}\times c_n(t)}\right)+\left(-\frac{q_n(t)}{r_n\times c_n(t)}+\frac{p_1(t)}{r_n}\right)\cdots\text{(a.3.26)}$$

収縮期：(a.3.27) ～ (a.3.39) は収縮期の連立微分方程式である.

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{q_1(t)}{r_1 \times c_1(t)} + \frac{p_2(t)}{r_1}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.27)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{p_1(t)}{r_1} - \frac{q_2(t)}{r_1 \times c_2(t)}\right) + \left(-\frac{q_2(t)}{r_2 \times c_2(t)} + \frac{p_3(t)}{r_2}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.28)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_3(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q_2(t)}{r_2 \times c_2(t)} - \frac{q_3(t)}{r_2 \times c_3(t)}\right) + \left(-\frac{q_3(t)}{r_3 \times c_3(t)} + \frac{p_4(t)}{r_3}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.29)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_k(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q_{k-1}(t)}{r_{k-1} \times c_{k-1}(t)} - \frac{q_k(t)}{r_{k-1} \times c_k(t)}\right) + \left(-\frac{q_k(t)}{r_k \times c_k(t)} + \frac{p_{k+1}(t)}{r_k}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.30)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{k+1}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q_k(t)}{r_k \times c_k(t)} - \frac{q_{k+1}(t)}{r_k \times c_{k+1}(t)}\right) + \left(-\frac{q_{k+1}(t)}{r_{k+1} \times c_{k+1}(t)} + \frac{p_{k+2}(t)}{r_{k+1}}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.31)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_l(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q_{l-1}(t)}{r_{l-1} \times c_l(t)} - \frac{q_l(t)}{r_{l-1} \times c_l(t)}\right) + \left(-\frac{q_l(t)}{r_l \times c_l(t)} + \frac{p_{l+1}(t)}{r_l}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.32)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+1}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q_l(t)}{r_l \times c_l(t)} - \frac{q_{l+1}(t)}{r_l \times c_{l+1}(t)}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.33)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+2}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(-\frac{q_{l+2}(t)}{r_{l+2} \times c_{l+2}(t)} + \frac{p_{l+3}(t)}{r_{l+2}}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.34)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+3}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{p_{l+2}(t)}{r_{l+2}} - \frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+2} \times c_{l+3}(t)}\right) + \left(-\frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+3} \times c_{l+3}(t)} + \frac{p_{l+4}(t)}{r_{l+3}}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.35)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_m(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q_{m-1}(t)}{r_{m-1} \times c_{m-1}(t)} - \frac{q_m(t)}{r_{m-1} \times c_m(t)}\right) + \left(-\frac{q_m(t)}{r_m \times c_m(t)} + \frac{p_{m+1}(t)}{r_m}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.36)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{m+1}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q_m(t)}{r_m \times c_m(t)} - \frac{q_{m+1}(t)}{r_m \times c_{m+1}(t)}\right) + \left(-\frac{q_{m+1}(t)}{r_{m+1} \times c_{m+1}(t)} + \frac{p_{m+2}(t)}{r_{m+1}}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.37)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{n-1}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q_{n-2}(t)}{r_{n-2} \times c_{n-2}(t)} - \frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-2} \times c_{n-1}(t)}\right) + \left(-\frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-1} \times c_{n-1}(t)} + \frac{p_n(t)}{r_{n-1}}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.38)$$

$$\frac{\mathrm{d}q_n(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-1} \times c_{n-1}(t)} - \frac{q_n(t)}{r_{n-1} \times c_n(t)}\right) \cdots (\mathrm{a}.3.39)$$

拡張期：(a.3.40) ～ (a.3.52) は拡張期の連立微分方程式である.

$$\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_n(t)}{r_n\times c_n(t)}-\frac{q_1(t)}{r_n\times c_1(t)}\right)\cdots\text{(a.3.40)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_2(t)}{r_2\times c_2(t)}+\frac{p_3(t)}{r_2}\right)\cdots\text{(a.3.41)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_3(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_2(t)}{r_2}-\frac{q_3(t)}{r_2\times c_3(t)}\right)+\left(-\frac{q_3(t)}{r_3\times c_3(t)}+\frac{p_4(t)}{r_3}\right)\cdots\text{(a.3.42)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_k(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{k-1}(t)}{r_{k-1}\times c_{k-1}(t)}-\frac{q_k(t)}{r_{k-1}\times c_k(t)}\right)+\left(-\frac{q_k(t)}{r_k\times c_k(t)}+\frac{p_{k+1}(t)}{r_k}\right)\cdots\text{(a.3.43)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{k+1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_k(t)}{r_k\times c_k(t)}-\frac{q_{k+1}(t)}{r_k\times c_{k+1}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{k+1}(t)}{r_{k+1}\times c_{k+1}(t)}+\frac{p_{k+2}(t)}{r_{k+1}}\right)\cdots\text{(a.3.44)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_l(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{l-1}(t)}{r_{l-1}\times c_{l-1}(t)}-\frac{q_l(t)}{r_{l-1}\times c_l(t)}\right)+\left(-\frac{q_l(t)}{r_l\times c_l(t)}+\frac{p_{l+1}(t)}{r_l}\right)\cdots\text{(a.3.45)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_l(t)}{r_l\times c_l(t)}-\frac{q_{l+1}(t)}{r_l\times c_{l+1}(t)}\right)\cdots\text{(a.3.46)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+2}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{q_{l+2}(t)}{r_{l+2}\times c_{l+2}(t)}+\frac{p_{l+3}(t)}{r_{l+2}}\right)\cdots\text{(a.3.47)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{l+3}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{p_{l+2}(t)}{r_{l+2}}-\frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+2}\times c_{l+3}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{l+3}(t)}{r_{l+3}\times c_{l+3}(t)}+\frac{p_{l+4}(t)}{r_{l+3}}\right)\cdots\text{(a.3.48)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_m(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{m-1}(t)}{r_{m-1}\times c_{m-1}(t)}-\frac{q_m(t)}{r_{m-1}\times c_m(t)}\right)+\left(-\frac{q_m(t)}{r_m\times c_m(t)}+\frac{p_{m+1}(t)}{r_m}\right)\cdots\text{(a.3.49)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{m+1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_m(t)}{r_m\times c_m(t)}-\frac{q_{m+1}(t)}{r_m\times c_{m+1}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{m+1}(t)}{r_{m+1}\times c_{m+1}(t)}+\frac{p_{m+2}(t)}{r_{m+1}}\right)\cdots\text{(a.3.50)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{n-1}(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{n-2}(t)}{r_{n-2}\times c_{n-2}(t)}-\frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-2}\times c_{n-1}(t)}\right)+\left(-\frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-1}\times c_{n-1}(t)}+\frac{p_n(t)}{r_{n-1}}\right)\cdots\text{(a.3.51)}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_n(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{q_{n-1}(t)}{r_{n-1}\times c_{n-1}(t)}-\frac{q_n(t)}{r_{n-1}\times c_n(t)}\right)+\left(-\frac{q_n(t)}{r_n\times c_n(t)}+\frac{p_1(t)}{r_n}\right)\cdots\text{(a.3.52)}$$